Автономная некоммерческая организация высшего образования
«ИНСТИТУТ ЭКОНОМИКИ И УПРАВЛЕНИЯ»
(АНО ВО «ИЭУ»)

Кафедра «Экономика»

Фонд оценочных средств по дисциплине

МАТЕМАТИКА. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Уровень высшего образования
БАКАЛАВРИАТ

Направление подготовки - 38.03.02 Менеджмент

Направленность (профиль) –Производственный менеджмент

Квалификация (степень) выпускника – бакалавр

Фонд оценочных средств рассмотрен на заседании кафедры «Экономика»
«17» января 2025 г., протокол № 17/01

СОДЕРЖАНИЕ

1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы

В соответствии с требованиями основной образовательной программы подготовки бакалавра в результате изучения дисциплины «Математика. Линейная алгебра» у студентов должны сформироваться следующие **универсальные компетенции (ОК)**:

Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач (УК-1);

общепрофессиональные компетенции (ОПК):

Способен осуществлять сбор, обработку и анализ данных, необходимых для решения поставленных управленческих задач, с использованием современного инструментария и интеллектуальных информационно-аналитических систем (ОПК-2)

2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

Видами учебной деятельности, в рамках которых приобретаются знания, умения, навыки, являются лекции, практические занятия, самостоятельная работа обучающихся.

Соотнесение планируемых результатов обучения с видами учебной деятельности и оценочными средствами при формировании компетенции

Критерии сформированности компетенции	Описание	Формы, методы, технологии
Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач (УК-1);		
знать	основные понятия матричного анализа, векторной алгебры и аналитической геометрии, используемые в экономических исследованиях и при изучении других дисциплин;	тестирование; ответ на экзамене;
уметь	выполнять основные действия с матрицами, находить определители, записывать в матричном виде полученные данные, интерпретировать полученные в ходе решения результаты;	тестирование; выполнение контрольной работы; ответ на экзамене;
владение навыками	записи текстовых задач в матричной форме, через линейные операторы, критериями выбора пакетов прикладных программ для решения конкретных задач.	выполнение контрольной работы;
Способен осуществлять сбор, обработку и анализ данных, необходимых для решения поставленных управленческих задач, с использованием современного инструментария и интеллектуальных информационно-аналитических систем (ОПК-2)		
знать	методы решения систем линейных уравнений, определения собственных значений и собственных векторов линейных операторов в математически формализованных задачах;	тестирование; ответ на экзамене;
уметь	выполнять основные действия с матрицами, находить определители, записывать в матричном виде полученные данные, интерпретировать полученные в ходе решения результаты;	тестирование; выполнение контрольной работы; ответ на экзамене;

владение навыками	записи текстовых задач в матричной форме, через линейные операторы, критериями выбора пакетов прикладных программ для решения конкретных задач.	выполнение контрольной работы;

Критерии и показатели оценивания тестовых заданий:

Вид тестового задания	Критерий	Показатель
тестовые задания с выбором одного (нескольких) ответа (-ов) в закрытой форме	выбор одного (нескольких) правильного (-ых) ответа (-ов) из предложенных вариантов	количество правильных выборов
тестовые задания на установление соответствия в закрытой форме	установление соответствия для всех предложенных признаков	количество правильно установленных соответствий
тестовые задания на установление правильной последовательности в закрытой форме	установление правильной последовательности в полном объеме предложенных вариантов	количество правильно установленных последовательностей

Критерии и показатели оценивания контрольной работы:

- объем выполненных заданий контрольной работы;
- глубина (соответствие изученным теоретическим обобщениям);
- осознанность (соответствие требуемым в программе умениям применять полученную информацию).

Критерии и показатели оценивания доклада с презентацией:

1. Новизна текста: а) актуальность темы исследования; б) новизна и самостоятельность в постановке проблемы, формулирование нового аспекта известной проблемы в установлении новых связей (межпредметных, внутрипредметных, интеграционных); в) умение работать с исследованиями, критической литературой, систематизировать и структурировать материал; г) явленность авторской позиции, самостоятельность оценок и суждений; д) стилевое единство текста, единство жанровых черт.
2. Степень раскрытия сущности вопроса: а) соответствие плана теме доклада; б) соответствие содержания теме и плану; в) полнота и глубина знаний по теме; г) обоснованность способов и методов работы с материалом; е) умение обобщать, делать выводы, сопоставлять различные точки зрения по одному вопросу (проблеме).
3. Обоснованность выбора источников: а) оценка использованной литературы: привлечены ли наиболее известные работы по теме исследования (в т.ч. журнальные публикации последних лет, последние статистические данные, сводки, справки и т.д.).
4. Умение выступать перед аудиторией: а) структура доклада, последовательность и логика изложения; б) скорость, громкость и четкость речи; в) использование невербальных средств концентрации внимания аудитории.
5. Соблюдение требований к оформлению презентации в Power Point: а) шрифт; б) цветовое оформление; в) содержание и оформление табличного и графического материала.

Критерии и показатели оценивания работы на практическом занятии:

- наличие полного и развернутого ответа на вопрос темы;
- демонстрация знаний ключевых понятий рассматриваемой проблемы;
- применение научной терминологии;
- грамотное оперирование полученными знаниями и навыками.

Критерии и показатели оценивания на экзамене

- содержательность и четкость ответа;
- владение материалом различной степени сложности;
- ориентирование в основных закономерностях функционирования объектов профессиональной деятельности.

3. Контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

Вопросы для самостоятельной подготовки

Тема 1. Матрицы и определители

Понятие матрицы. Виды матриц. Равенство матриц. Действия с матрицами. Транспонирование матриц. Квадратные матрицы.

Определители квадратных матриц второго, третьего и n-го порядков. Алгебраическое дополнение. Свойства определителей. Теорема Лапласа. Обратная матрица и алгоритм ее вычисления. Понятия минора n-го порядка матрицы. Ранг матрицы. Вычисление ранга матрицы с помощью элементарных преобразований. Линейная комбинация, линейная зависимость и независимость строк (столбцов) матрицы. Теорема о ранге матрицы.

Тема 2. Системы линейных уравнений

Система m линейных уравнений с n переменными (общий вид).

Матрица системы. Матричная форма записи системы линейных уравнений. Совместные и несовместные системы. Теорема Крамера о разрешимости системы n линейных уравнений с n переменными.

Решение такой системы: а) по формулам Крамера; б) методом обратной матрицы; в) методом Гаусса. Понятие о методе Жордана–Гаусса. Теорема Кронекера–Капелли. Условие определенности и неопределенности любой совместной системы линейных уравнений. Базисные (основные) и свободные (неосновные) переменные.

Базисное решение. Система линейных однородных уравнений и ее решения. Понятие о модели Леонтьева.

Тема 3. Векторные пространства

Векторы на плоскости и в пространстве (геометрические векторы). Линейные операции над векторами. Коллинеарные и компланарные векторы. Координаты и длина вектора. Скалярное произведение двух векторов (определение) и его выражение в координатной форме. Угол между векторами. n□мерный вектор. Линейная комбинация, линейная зависимость и независимость векторов. Векторное (линейное) пространство, его размерность и базис. Разложение вектора по базису. Переход к новому базису. Скалярное произведение векторов в n-мерном пространстве. Евклидово пространство.

Длина (норма) вектора. Ортогональные векторы. Ортогональный и ортонормированный базисы.

Тема 4. Линейные операторы

Понятие линейного оператора. Образ и прообраз векторов.

Матрица линейного оператора в заданном базисе. Ранг оператора.

Операции над линейными операторами. Нулевой и тождественный операторы. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора (матрицы). Характеристический многочлен матрицы.

Диагональный вид матрицы линейного оператора в базисе, состоящем из его собственных векторов.

Тема 5. Квадратичные формы

Квадратичные формы (определение). Матрица квадратичной формы. Матричная форма записи квадратичной формы. Невырожденное линейное преобразование квадратичной формы. Канонический вид и ранг квадратичной формы. Закон инерции квадратичных форм. Положительно и отрицательно определенная, знакоопределенная квадратичные формы. Критерий определенности квадратичной формы через собственные значения ее матрицы. Критерий Сильвестра.

Тема 6. Элементы аналитической геометрии

Уравнение линии на плоскости. Уравнение прямой с угловым коэффициентом и начальной ординатой. Общее уравнение прямой и его исследование. Построение прямой по ее уравнению. Уравнение прямой, проходящей: а) через данную точку в данном направлении; б) через две данные точки. Координаты точки пересечения двух прямых. Условие параллельности и перпендикулярности прямых. Кривые второго порядка, их общее уравнение. Нормальное уравнение окружности. Канонические уравнения эллипса, гиперболы, параболы. Уравнение плоскости в пространстве и его частные случаи. Условие параллельности и перпендикулярности плоскостей. Уравнение прямой как пересечение двух плоскостей. Канонические уравнения прямой в пространстве. Углы между плоскостями, прямыми, прямой и плоскостью.

Задания для практических занятий

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 1

Тема 1: Матрицы и определители

ПЛАН

1. Операции над матрицами (транспонирование, сложение, умножение).
2. Вычисление определителей 2-го и 3-го порядков.
3. Вычисление определителей с помощью теоремы Лапласа.
4. Нахождение матрицы, обратной данной.
5. Нахождение ранга матрицы (с помощью элементарных преобразований).
6. Линейно независимые строки (столбцы) матрицы.
7. Тестовые задания.
8. Типовые задачи контрольной работы.

1. Операции над матрицами (сложение, умножение, транспонирование)

Задача 1. Найти произведение матрицы A на число λ, где

$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, λ=5.

Задача 2. Найти сумму матриц $A+B$, где

$$A=\begin{pmatrix}2&3&0\\1&5&6\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}0&1&4\\2&5&1\end{pmatrix}.$$

Задача 3. Найти произведение матриц $A\cdot B$, где

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\3&1&0\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}-1&0&1\\5&1&4\\-2&0&1\end{pmatrix}.$$

Задача 4. Найти матрицу, транспонированную к матрице

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}.$$

2. Вычисление определителей 2-го и 3-го порядков

Задача 1. Вычислить определитель матрицы второго порядка

$$A=\begin{pmatrix}2&3\\1&5\end{pmatrix}.$$

Задача 2. Вычислить определитель матрицы третьего порядка

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}.$$

3. Вычисление определителей с помощью теоремы Лапласа

Задача 1. Вычислить определитель матрицы четвертого порядка

$$A=\begin{pmatrix}4&6&-2&4\\1&2&-3&1\\4&-2&1&0\\6&4&4&6\end{pmatrix}.$$

4. Нахождение матрицы, обратной данной

Задача 1. Найти матрицу, обратную к матрице

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}.$$

5. Нахождение ранга матрицы (с помощью элементарных преобразований)

Задача 1. Вычислить ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix}0&-1&3&0&2\\2&-4&1&5&3\\-4&5&7&-10&0\\-2&1&8&-5&3\end{pmatrix}.$$

6. Линейно независимые строки (столбцы) матрицы

Задача 1. Определить максимальное число линейно независимых столбцов матрицы

$$A=\begin{pmatrix}5 & 3 & 8\\ 4 & 3 & 7\\ 3 & 2 & 5\end{pmatrix}.$$

7. Тестовые задания

1. Пусть $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}$. Какие из перечисленных матриц существуют?

Ответы: 1) $A+B'$; 2) $A\cdot B$; 3) $B\cdot A$; 4) B^{-1}.

2. При каких условиях существует матрица $A'{\cdot}B$?

Ответы: 1) число строк матрицы *A* равно числу строк матрицы *B*;

2) число столбцов матрицы *A* равно числу столбцов матрицы *B*;

3) число строк матрицы *A* равно числу столбцов матрицы *B*, а число столбцов матрицы *A* равно числу строк матрицы *B*;

4) матрицы *A* и *B* одинакового размера.

3. Матрица *A* имеет размер 3×4. Какой размер может иметь матрица *B*, чтобы существовало произведение $A\cdot B$?

Ответы: 1) 3×4; 2) 4×3; 3) 3×3; 4) 3×5; 5) 4×5.

4. Найти элемент c_{33} матрицы $C=B\cdot A$, если $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -5\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Ответы: 1) – 1; 2) – 2; 3) – 3; 4) такой элемент не существует.

5. Найти определитель матрицы $C=2A-B'$, где $A=\begin{pmatrix}3 & -5\\ 2 & 4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 5\end{pmatrix}$.

6. Найти разность определителей: $\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & -7 & 8\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}3 & 0 & 0\\ 4 & -2 & 0\\ 5 & 6 & 1\end{vmatrix}$.

7. Определитель матрицы не изменится, если…

Ответы: 1) поменять местами две строки; 2) умножить столбец на некоторое число; 3) к элементам какой-либо строки прибавить элементы другой строки, предварительно умноженные на ненулевое число; 4) матрицу умножить на некоторое ненулевое число.

8. Вычислить $|A\cdot B|^3$, если $A=\begin{pmatrix}2 & 4\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$.

9. Матрица *A* размера $m\times n$ имеет ранг *k*, если…

Ответы: 1) $m=n=k$; 2) $\max(m, n)=k$; 3) существует A^{-1}; 4) наивысший порядок отличных от нуля миноров равен *k*.

10. Найти алгебраическое дополнение элемента матрицы *A*, равного 8, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 9 & 7 & 15\\ 3 & 8 & 6\end{pmatrix}.$$

11. Матрица $C=AB^{-1}(BA^{-1})AB$ после преобразований равна…

Ответы: 1) $2A$; 2) B; 3) AB; 4) E.

12. Если у квадратной матрицы *A* определитель $|A|\neq0$, то …

Ответы: 1) строки матрицы *A* линейно независимы;

2) строки матрицы A линейно зависимы;
3) ранг матрицы A равен порядку матрицы;
4) ранг матрицы A меньше порядка матрицы;
5) ранг матрицы A больше порядка матрицы.

8. Типовые задачи контрольной работы

Задача 1. Найти матрицу $C = A \cdot A'$, где $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Выяснить, имеет ли матрица C обратную. Найти ранг матрицы C.

Задача 2. Вычислить определитель матрицы $C = A^2 + 3A - E$ разложением по второй строке, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, E – единичная матрица. Являются ли столбцы матрицы C линейно независимыми?

Задача 3. Решить матричное уравнение $AXB = C$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 4 & 17 \end{pmatrix}$.

Задача 4. Решить матричное уравнение $X(B'B - 3E) + 18B = 0$, где $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, E – единичная матрица третьего порядка.

Задача 5. Вычислить ранг матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 10 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Являются ли строки матрицы A линейно независимыми?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 2

Тема 2: Системы линейных уравнений
Тема 3: Векторные пространства
Тема 4: Линейные операторы
Тема 5: Квадратичные формы
Тема 6: Элементы аналитической геометрии

ПЛАН

1. Решение системы линейных уравнений:
   - по формулам Крамера;
   - методом обратной матрицы;
   - методом Гаусса.
2. Решение матричных уравнений.
3. Линейная зависимость векторов.
4. Собственные векторы и собственные значения матрицы.
5. Основные виды уравнения прямой линии на плоскости.
6. Условия параллельности и перпендикулярности прямых линий.
7. Тестовые задания.

8. Типовые задачи контрольной работы.

1. Решение системы линейных уравнений

Задача 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

а) по формулам Крамера; б) методом обратной матрицы.

Задача 2. Методом Гаусса решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 16. \end{cases}$$

2. Решение матричных уравнений

Задача 1. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решить уравнения: а) $AX = B$; б) $XA = C$.

3. Линейная зависимость векторов

Задача 1. Выяснить, являются ли векторы $a_1 = (1,\ 3,\ 1,\ 3)$, $a_2 = (2,\ 1,\ 1,\ 2)$, $a_3 = (3,\ -1,\ 1,\ 1)$ линейно зависимыми.

4. Собственные векторы и собственные значения матрицы

Задача 1. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Основные виды уравнения прямой линии на плоскости

Задача 1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку *A*(3; -2) под углом 135 ° к оси *Ox*.

Задача 2. Составить уравнение прямой, проходящей через точки *A*(-5; 4) и *B*(3; -2).

6. Условия параллельности и перпендикулярности прямых линий

Задача 1. Составить уравнения двух прямых, проходящих через точку *A*(2; 1), одна из которых параллельна прямой $3x - 2y + 2 = 0$, а другая перпендикулярна той же прямой.

7. Тестовые задания

1. Найти $x_{2,}$, если при решении системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 3, \\ -2x_2 + x_3 = 7, \\ 3x_1 + x_2 = -2. \end{cases}$$

по формулам Крамера найдены определители:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 5; \quad \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 7 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -10; \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 7 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 15.$$

2. При каком значении параметра α при решении следующей системы линейных уравнений по формулам Крамера выполняется равенство $\Delta = \Delta_3$?

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 + 4x_3 = 1+\alpha, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

3. Решение матричного уравнения $AXB = C$ имеет вид:

Ответы: 1) $X = A^{-1}CB^{-1}$; 2) $X = A^{-1}B^{-1}C$; 3) $X = B^{-1}CA^{-1}$; 4) $X = CB^{-1}A^{-1}$.

4. При решении системы линейных уравнений методом Гаусса получена расширенная матрица вида: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$. Данная система…

Ответы: 1) совместная; 2) несовместная; 3) определенная; 4) неопределенная.

5. Что можно сказать о системе n линейных уравнений с n переменными, если определитель ее матрицы $|A| \neq 0$?

Ответы: 1) система совместная; 2) система несовместная;
3) система определенная; 4) система неопределенная; 5) ничего сказать нельзя.

6. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 1, \\ -2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Ответы:	-2	-1	0	1	2	3
$x_1 =$						
$x_2 =$						
$x_3 =$						

7. С помощью метода Гаусса установить, сколько решений имеет система уравнений: $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 4x_2 + x_3 = 3, \\ 6x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

Ответы: 1) одно решение; 2) ни одного решения;
3) бесконечное число решений; 4) два решения.

8. Найти ординату точки пересечения прямой $3y - 2x + 6 = 0$ с осью Oy.

9. Найти точку пересечения двух прямых $3x - 2y + 8 = 0$ и $4y + x - 2 = 0$.

Ответы: 1) $(1;-2)$; 2) $(2;2)$; 3) $(4;0)$; 4) $(0;4)$; 5) $(-2;1)$.

10. Какое уравнение задает прямую, изображенную на рис. 1.

Ответы: 1) $y = 4x + 2$; 2) $4x - 2y = 0$; 3) $4y + 2x = 0$; 4) $4x + y - 2 = 0$.

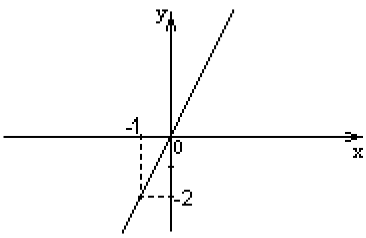


Рис. 1.

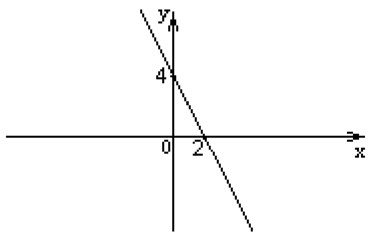


Рис. 2.

11. Найти угловой коэффициент прямой, изображенной на рис. 2.

12. Найти угловой коэффициент прямой, проходящей через две точки с координатами (–1; 2) и (3; 0).

13. Прямые $3x+2y+5=0$ и $2x+3y+5=0$...

Ответы: 1) параллельны; 2) перпендикулярны; 3) совпадают; 4) пересекаются не под прямым углом.

14. Прямые $y=kx+b$ и $3y-4x+1=0$ перпендикулярны. Найти угловой коэффициент k.

8. Типовые задачи контрольной работы

Задача 1. По формулам Крамера решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Задача 2. Методом обратной матрицы решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 7, \\ x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Задача 3. Методом Гаусса решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -5, \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 = 5, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -6. \end{cases}$$

Задача 4. Решить матричное уравнение $AXB=C$, где $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 9\\ 4 & 17\end{pmatrix}$.

Задача 5. Решить матричное уравнение $X(B'B-3E)+18B=0$, где $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$; Е - единичная матрица третьего порядка.

Тестовые задания

Тема 1: Определители

1. Определитель $\begin{vmatrix}5 & a\\ -2 & 4\end{vmatrix} < 0$, если значение a равно …

– 15

– 5

– 10

0

Решение:

Определитель второго порядка вычисляется по формуле $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Тогда $\begin{vmatrix} 5 & a \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - a \cdot (-2) = 20 + 2a.$

По условию задачи определитель должен быть меньше нуля, то есть

$20 + 2a < 0 \Rightarrow \quad a < -10.$

Из предложенных ответов условию задачи удовлетворяет число $-15 < -10.$

2. Определитель, **не равный** нулю, может иметь вид …

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ - правильно

$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

Решение:

Вычислим каждый из определителей, например, разложением по первой строке:

1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot (0 \cdot 4 - 1 \cdot 0) = 0.$

2) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} =$

$= 1 \cdot (7 \cdot 0 - 0 \cdot 4) - 3 \cdot 0 + 2 \cdot (0 \cdot 4 - 7 \cdot 0) = 0.$

3) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot (0 \cdot 4 - 0 \cdot 1) = 0.$

4) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (0 \cdot 0 - 2 \cdot 4) = -8 \neq 0.$

3. Корень уравнения $\begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ x+3 & 4 \end{vmatrix} = -4x$ равен …

– 1

– 5

1

5

4. Определитель $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -5 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ равен …

– 21

– 3

33

5

Решение:

Определитель третьего порядка можно вычислить, например, разложением по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -5 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-2 \cdot 3 - (-5) \cdot 3) +$$

$$+ 1 \cdot (-2 \cdot 0 - 4 \cdot 3) = -1 \cdot 9 + 1 \cdot (-12) = -9 - 12 = -21.$$

5. Определитель $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 1 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ равен …

91

97

83

89

Решение:

Определитель третьего порядка можно вычислить, например, разложением по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 1 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 21 - 1 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 91.$$

6. Корень уравнения $\begin{vmatrix} 3 & x+5 \\ 1 & 2-x^2 \end{vmatrix} = -3$ равен …

– 1

– 2

1

2

Решение:

Определитель второго порядка вычисляется по формуле $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Тогда $\begin{vmatrix} 3 & x+5 \\ 1 & 2-x^2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (2 - x^2) - (x+5) \cdot 1 = 6 - 3x^2 - x - 5 = -3x^2 - x + 1.$

По условию задачи определитель должен равняться -3, то есть

$$-3x^2 - x + 1 = -3 \quad \Rightarrow \quad -3x^2 - x + 4 = 0.$$

Следовательно, $x_1 = -1;\ x_2 = \dfrac{4}{3}.$

7. Определитель, равный нулю, может иметь вид …

$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 9 \end{vmatrix}$ - правильно

$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

Решение:

Вычислим каждый из определителей, например, разложением по последнему столбцу:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -9 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -9 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} =$

$= 3 \cdot (-9) - (-1) \cdot 0 = -27 \neq 0.$

2) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 10 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} =$
$= 2 \cdot (1 \cdot 10 - 0 \cdot 0) = 20 \neq 0.$

3) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} =$
$= 3 \cdot (0 \cdot 0 - 5 \cdot 7) = 3 \cdot (-35) = -105 \neq 0.$

4) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 9 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} =$
$= 6 \cdot (3 \cdot 0 - 5 \cdot 3) + 9 \cdot (2 \cdot 5 - 0 \cdot 3) = 6 \cdot (-15) + 9 \cdot 10 = -90 + 90 = 0.$

Тема 2: Операции над матрицами

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -7 & 5 & -2 \end{pmatrix}$. Тогда матрица $C = 2A + B$ равна …

$\begin{pmatrix} 4 & 7 & 7 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ - правильно

$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 4 & 7 & 7 \\ 15 & 9 & 8 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 11 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

2. Умножение матрицы *A* на матрицу *B* возможно, если эти матрицы имеют вид …

$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ - правильно

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ и $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

3. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда матрица $C = A \cdot B$ имеет вид …

$\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$ -правильно

$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -9 & -15 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -6 & 8 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

Решение:

Произведением $A \cdot B$ матрицы A размера $m \times n$ на матрицу B размера $n \times l$ называется матрица C размера $m \times l$, элемент которой c_{ij} равен сумме произведений соответственных элементов *i*-й строки матрицы A и *j*-го столбца матрицы B. Тогда

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \cdot 1 + 4 \cdot (-3) & 6 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 + (-3) \cdot (-3) & -1 \cdot 0 + (-3) \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

4. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$ Если $B = 2A^T - A,$ то матрица *B* равна …

$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ - правильно

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

5. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$ Если $B^T - 2A = 3E,$ где E – единичная матрица того же размера, что и матрица *A*, то матрица *B* равна …

$\begin{pmatrix} 11 & -6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ - правильно

$\begin{pmatrix} 11 & 4 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

Решение:

При умножении матрицы на число каждый элемент матрицы умножается на данное число. При сложении или вычитании матриц одинаковой размерности соответствующие элементы матриц складываются или вычитаются друг из друга. В данном случае:

$$B^T - 2A = 3E \Rightarrow B^T - 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$B^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}.$ Следовательно, $B = \begin{pmatrix} 11 & -6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$

6. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}$. Если $3A-B^T=2E$, где E – единичная матрица того же размера, что и матрица *A*, то матрица *B* равна …

$\begin{pmatrix}1 & 12\\ 9 & 4\end{pmatrix}$ - правильно

$\begin{pmatrix}1 & 9\\ 12 & 4\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1 & 10\\ 7 & 4\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1 & 7\\ 10 & 4\end{pmatrix}$

Решение:

При умножении матрицы на число каждый элемент матрицы умножается на данное число. При сложении или вычитании матриц одинаковой размерности соответствующие элементы матриц складываются или вычитаются друг из друга. В данном случае:

$$3A-B^T=2E\Rightarrow 3\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}-B^T=2\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$B^T=\begin{pmatrix}3 & 9\\ 12 & 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 9\\ 12 & 4\end{pmatrix}$. Следовательно, $B=\begin{pmatrix}1 & 12\\ 9 & 4\end{pmatrix}$.

7. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & -4\\ -2 & 2\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$. Тогда матрица $C=A\cdot B$ имеет вид …

$\begin{pmatrix}8 & -2\\ -4 & -2\end{pmatrix}$ - правильно

$\begin{pmatrix}-8 & 4\\ -6 & 6\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}8 & -4\\ -2 & -2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}-8 & -6\\ 4 & 6\end{pmatrix}$

Решение:

Произведением $A\cdot B$ матрицы A размера $m\times n$ на матрицу B размера $n\times l$ называется матрица C размера $m\times l$, элемент которой c_{ij} равен сумме произведений соответственных элементов *i*-й строки матрицы A и *j*-го столбца матрицы B. Тогда

$$C=A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & -4\\ -2 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot0+(-4)\cdot(-2) & 1\cdot2+(-4)\cdot1\\ -2\cdot0+2\cdot(-2) & -2\cdot2+2\cdot1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}8 & -2\\ -4 & -2\end{pmatrix}.$$

Тема 3: Ранг матрицы

1. Ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & x^2 - 9 \\ x - 4 & 0 \end{pmatrix}$ равен двум, если значение x равно …
– 4
4
– 3
3

2. Ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ равен …
2
1
3
4
Решение:
Рангом матрицы называется наибольший из порядков ее миноров, не равных нулю. Существуют ненулевые миноры второго порядка, например:

$$M_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - (-1) \cdot 5 = 6 + 5 = 11 \neq 0.$$

Следовательно, ранг равен двум.

3. Ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ равен …
2
1
3
4
Решение:
Рангом матрицы называется наибольший из порядков ее миноров, не равных нулю. Вычислим миноры первого, второго и третьего порядков.

$$M_1 = 4 \neq 0; \quad M_2 = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot 4 - 4 \cdot 0 = 16 \neq 0;$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot (0 \cdot 4 - 4 \cdot 4) -$$

$$- 4 \cdot (0 \cdot 4 - 4 \cdot 4) + 4 \cdot (0 \cdot 4 - 0 \cdot 4) = 4 \cdot (-16) - 4 \cdot (-16) = -64 + 64 = 0.$$

Тогда ранг матрицы A будет равен двум, так как наибольший из порядков ее миноров, не равных нулю, равен двум.

4. Ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} x^2 - 1 & 0 \\ 0 & x + 2 \end{pmatrix}$ равен двум, если значение x равно …
2
– 2
– 1
1

Решение:
Рангом матрицы называется наибольший из порядков ее миноров, не равных нулю. Ранг матрицы A будет равен двум, если минор второго порядка не равен нулю. Вычислим

$$M_2 = \begin{vmatrix} x^2 - 1 & 0 \\ 0 & x + 2 \end{vmatrix} = \left(x^2 - 1\right) \cdot (x + 2) \neq 0.$$

Следовательно, $x \neq \pm 1, \;\; x \neq -2.$

5. Ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} x+1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & x-2 \end{pmatrix}$ равен двум, если значение *x* равно …

2
0
– 2
1

Решение:
Рангом матрицы называется наибольший из порядков ее миноров, не равных нулю. Так как существуют ненулевые миноры второго порядка, например

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 5 = 8 - 15 = -7 \neq 0,$$

то ранг матрицы A будет равен двум, если минор третьего порядка равен нулю. Вычислим

$$M_3 = \begin{vmatrix} x+1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix} = (x+1) \cdot 5 \cdot (x-2) = 0.$$

Следовательно, $x = -1, \;$ или $\; x = 2.$

6. Матрица, ранг которой равен единице, может иметь вид …

$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ - правильно

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Решение:
Рангом матрицы называется наибольший из порядков ее миноров, не равных нулю. Вычислим ранг каждой матрицы.

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$ Так как существует ненулевой минор второго порядка

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 \neq 0,$$

то ранг матрицы равен двум.

2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$ Так как существует ненулевой минор второго порядка

$M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot 1 - 2\cdot 1 = 1 \neq 0,$ то ранг матрицы равен двум.

3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$ Так как существует ненулевой минор второго порядка $M_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0\cdot 0 - 1\cdot 1 = -1 \neq 0,$ то ранг матрицы равен двум.

4) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$ Так как существует ненулевой минор первого порядка, например $M_1 = 2 \neq 0,$ а минор второго порядка $M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 2 - 2\cdot 2 = 4 - 4 = 0,$ то ранг матрицы равен единице.

Тема 4: Обратная матрица

1. Для матрицы *A* существует обратная, если она равна …

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ - правильно

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 3 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

Решение:

Всякая невырожденная квадратная матрица имеет обратную матрицу, то есть матрица имеет обратную, если определитель матрицы не равен нулю, тогда

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(9-1) - 0 + 0 = 8 \neq 0.$$

2. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & x^2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ **не существует** обратной, если значение *x* равно …

± 4 - правильно

± 8

$\pm \frac{1}{4}$

$\pm \frac{1}{8}$

Решение:
Матрица не имеет обратной, если определитель матрицы равен нулю, то есть
$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & x^2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 4 \cdot 8 - x^2 \cdot 2 = 32 - 2x^2 = 0 \quad \Rightarrow 2(x^2 - 16) = 0 \Rightarrow x = \pm 4.$$

3. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Тогда решение матричного уравнения $A \cdot X = B$ имеет вид …

$\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -5 & 11 \end{pmatrix}$ - правильно

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -10 & 22 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 7 & -16 \\ -8 & 20 \end{pmatrix}$

Решение:

Решение матричного уравнения имеет вид $X = A^{-1} \cdot B$, где

$A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$ – обратная матрица.

Вычислим последовательно $|A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 8 - 6 = 2 \neq 0,$

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 2 = 2,$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 3 = -3,$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 2 = -2,$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 4 = 4.$

Тогда $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$

Следовательно,
$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -10 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -5 & 11 \end{pmatrix}.$$

4. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Тогда решение матричного уравнения $X \cdot A = B$ имеет вид …

$\begin{pmatrix} 2{,}8 & -1{,}4 \\ 1{,}4 & -1{,}2 \end{pmatrix}$ - правильно

$\begin{pmatrix} -0{,}6 & -0{,}4 \\ -0{,}2 & -2{,}2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -2{,}8 & -1{,}4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0{,}6 & 3{,}2 \\ -0{,}2 & -3{,}4 \end{pmatrix}$

Решение:

Решение матричного уравнения $X \cdot A = B$ можно представить как $X = B \cdot A^{-1}$, где $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$ – обратная матрица.

Вычислим последовательно $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) = -1 + 6 = 5,$

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 1 = 1,\ A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (-2) = 2,$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 3 = -3,\ A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1.$

Тогда $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$

Следовательно,

$$X = B \cdot A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 14 & -7 \\ 7 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}8 & -1{,}4 \\ 1{,}4 & -1{,}2 \end{pmatrix}.$$

5. Для матрицы *A* существует обратная, если она равна …

$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ - правильно

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 9 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 8 & 1 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

Решение:

Всякая невырожденная квадратная матрица имеет обратную матрицу, то есть матрица имеет обратную, если определитель матрицы не равен нулю. Тогда вычислим определители

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot (0 - 0) - 2 \cdot (4 - 1) +$$

$+5\cdot(0-0)=-6\neq 0,$ то есть для матрицы $A=\begin{pmatrix}3&2&5\\2&0&1\\1&0&2\end{pmatrix}$ существует обратная. Так как определители остальных матриц равны нулю, то для них обратной матрицы не существует.

6. Для матрицы $A=\begin{pmatrix}1&3&x\\2&6&4\\x&5&1\end{pmatrix}$ **не существует** обратной, если значение *x* равно …

2

– 2

1

– 1

Тема 5: Системы линейных уравнений

1. Методом Крамера **не может быть решена** система линейных уравнений …

$\begin{cases}x+2y-1=0,\\2x+4y-1=0\end{cases}$ - правильно

$\begin{cases}7x+3y-4=0,\\2x-5y-7=0\end{cases}$

$\begin{cases}3x+y-1=0,\\7x-y+1=0\end{cases}$

$\begin{cases}3x+4y-1=0,\\-5x+y-6=0\end{cases}$

Решение:

Систему линейных алгебраических уравнений можно решить методом Крамера, если ее определитель не равен нулю.

1. Из системы $\begin{cases}7x+3y-4=0,\\2x-5y-7=0\end{cases}$ получим

$\Delta=\begin{vmatrix}7&3\\2&-5\end{vmatrix}=7\cdot(-5)-3\cdot 2=-35-6=-41\neq 0,$ следовательно, система может быть решена методом Крамера.

2. Из системы $\begin{cases}3x+y-1=0,\\7x-y+1=0\end{cases}$ получим

$\Delta=\begin{vmatrix}3&1\\7&-1\end{vmatrix}=3\cdot(-1)-1\cdot 7=-3-7=-10\neq 0,$ следовательно, система может быть решена методом Крамера.

3. Из системы $\begin{cases}3x+4y-1=0,\\-5x+y-6=0\end{cases}$ получим

$\Delta=\begin{vmatrix}3&4\\-5&1\end{vmatrix}=3\cdot 1-(-5)\cdot 4=3+20=23\neq 0,$ следовательно, система может быть решена методом Крамера.

4. Из системы $\begin{cases} x+2y-1=0, \\ 2x+4y-1=0 \end{cases}$ получим $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot 2 = 4-4=0,$ следовательно, система не может быть решена методом Крамера.

2. Базисное решение системы $\begin{cases} 3x-y+2z=1, \\ 2x+3y-z=8 \end{cases}$ может иметь вид …

(1; 2; 0)

(– 1; – 2; 0)

(2; 1; 0)

(– 2; – 1; 0)

Решение:

По методу Гаусса приведем матрицу системы с помощью элементарных преобразований строк к трапецеидальной или треугольной форме. Запишем расширенную матрицу системы и преобразуем ее:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 8 \end{array}\right) \square \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -2 & 4 & 2 \\ 6 & 9 & -3 & 24 \end{array}\right) \square \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 11 & -7 & 22 \end{array}\right).$ Следовательно, система может быть записана в виде

$$\begin{cases} 6x-2y+4z=2, \\ 11y-7z=22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{6}(2+2y-4z), \\ y=\frac{1}{11}(22+7z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-\frac{5}{11}z, \\ y=2+\frac{7}{11}z \end{cases}$$

где z – свободная переменная, а x и y – базисные. Общее решение будет иметь вид $\left(1-\frac{5}{11}z;\ 2-\frac{7}{11}z;\ z\right).$ Базисным решением называется всякое решение системы, в котором свободные переменные имеют нулевые значения. Значит, базисное решение будет иметь вид $(1;\ 2;\ 0).$

3. Методом Крамера **не может быть решена** система линейных уравнений …

$\begin{cases} -2x+3y+5=0, \\ 4x-6y-7=0 \end{cases}$ - правильно

$\begin{cases} -2x+3y+5=0, \\ 4x+3y-7=0 \end{cases}$

$\begin{cases} -4x+3y+5=0, \\ 4x-6y-7=0 \end{cases}$

$\begin{cases} -2x-3y+5=0, \\ 4x-6y-7=0 \end{cases}$

Решение:

Систему линейных алгебраических уравнений можно решить методом Крамера, если ее определитель не равен нулю.

1. Из системы $\begin{cases} -2x+3y+5=0, \\ 4x+3y-7=0 \end{cases}$ получим

$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 3 - 3\cdot 4 = -6 - 12 = -18 \neq 0.$ Следовательно, система может быть решена методом Крамера.

2. Из системы $\begin{cases} -4x + 3y + 5 = 0, \\ 4x - 6y - 7 = 0 \end{cases}$ получим $\Delta = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = (-4)\cdot(-6) - 3\cdot 4 = 24 - 12 = 12 \neq 0.$ Следовательно, система может быть решена методом Крамера.

3. Из системы $\begin{cases} -2x - 3y + 5 = 0, \\ 4x - 6y - 7 = 0 \end{cases}$ получим $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = (-2)\cdot(-6) - (-3)\cdot 4 = 12 + 12 = 24 \neq 0.$ Следовательно, система может быть решена методом Крамера.

4. Из системы $\begin{cases} -2x + 3y + 5 = 0, \\ 4x - 6y - 7 = 0 \end{cases}$ получим $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = (-2)\cdot(-6) - 3\cdot 4 = 12 - 12 = 0.$ Следовательно, система не может быть решена методом Крамера.

4. Для невырожденной квадратной матрицы *A* решение системы $AX = B$ в матричной форме имеет вид …

$X = A^{-1}B$ - правильно

$X = B^{-1}A$

$X = AB^{-1}$

$X = BA^{-1}$

5. Решение системы линейных уравнений $\begin{cases} 5x - 2y = 1, \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ методом Крамера может иметь вид …

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}};\quad y = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}$ - правильно

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}};\quad y = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5 & 2\\ -2 & 1\end{vmatrix}};\quad y=\frac{\begin{vmatrix}5 & 1\\ -2 & 4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5 & 2\\ -2 & 1\end{vmatrix}}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}5 & 2\\ -2 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 1\end{vmatrix}};\quad y=\frac{\begin{vmatrix}5 & 2\\ -2 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5 & 1\\ -2 & 4\end{vmatrix}}$$

Решение:

Решение системы n линейных уравнений с n неизвестными, определитель которой $\Delta=|A|\neq 0,$ находится по формулам Крамера $x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\ \ldots\ x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta},$ где $\Delta_j(j=1,2,\ldots,n)$ – определитель, полученный из определителя системы заменой *j*-го столбца столбцом свободных членов, то есть

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & -2\\ 4 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}};\quad y=\frac{\begin{vmatrix}5 & 1\\ 2 & 4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}}.$$

6. Матричным методом может быть решена система линейных уравнений …

$\begin{cases}3x+y-1=0,\\ 7x-y+1=0\end{cases}$ - правильно

$\begin{cases}4x+2y-1=0,\\ 6x+3y-7=0\end{cases}$

$\begin{cases}3x+y-z=1,\\ 7x-y+z=2\end{cases}$

$\begin{cases}3x-6z-1=0,\\ -x+2z-6=0\end{cases}$

Решение:

Систему линейных алгебраических уравнений можно решить матричным методом, если ее определитель не равен нулю.

1. Из системы $\begin{cases}4x+2y-1=0,\\ 6x+3y-7=0\end{cases}$ получим $\Delta=\begin{vmatrix}4 & 2\\ 6 & 3\end{vmatrix}=4\cdot 3-2\cdot 6=12-12=0.$

Следовательно, система не может быть решена матричным методом.

2. Система $\begin{cases}3x+y-z=1,\\ 7x-y+z=2\end{cases}$ не может быть решена матричным методом, так как количество переменных превышает число уравнений.

3. Из системы $\begin{cases}3x-6z-1=0,\\ -x+2z-6=0\end{cases}$ получим

$\Delta=\begin{vmatrix}3 & -6\\ -1 & 2\end{vmatrix}=3\cdot 2-(-6)\cdot(-1)=6-6=0.$ Следовательно, система не может быть решена матричным методом.

4. Из системы $\begin{cases} 3x + y - 1 = 0, \\ 7x - y + 1 = 0 \end{cases}$ получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) - 1 \cdot 7 = -3 - 7 = -10 \neq 0.$$

Следовательно, система может быть решена матричным методом.

7. Матричным методом **не может быть решена** система линейных уравнений …

$\begin{cases} 4x - 2z + 4 = 0, \\ -10x + 5z - 5 = 0 \end{cases}$ - правильно

$\begin{cases} 2x - 4z - 1 = 0, \\ -x - 2z - 6 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 4x + y - 5 = 0, \\ 5x - 2y + 3 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 3z - 5y - 7 = 0, \\ -z + 2y - 3 = 0 \end{cases}$

Решение:

Систему линейных алгебраических уравнений можно решить матричным методом, если ее определитель не равен нулю.

1. Из системы $\begin{cases} 2x - 4z - 1 = 0, \\ -x - 2z - 6 = 0 \end{cases}$ получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - (-4) \cdot (-1) = -4 - 4 = -8 \neq 0.$$

Следовательно, система может быть решена матричным методом.

2. Из системы $\begin{cases} 4x + y - 5 = 0, \\ 5x - 2y + 3 = 0 \end{cases}$ получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-2) - 1 \cdot 5 = -8 - 5 = -13 \neq 0.$$

Следовательно, система может быть решена матричным методом..

3. Из системы $\begin{cases} 3z - 5y - 7 = 0, \\ -z + 2y - 3 = 0 \end{cases}$ получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - (-5) \cdot (-1) = 6 - 5 = 1 \neq 0.$$

Следовательно, система может быть решена матричным методом.

4. Из системы $\begin{cases} 4x - 2z + 4 = 0, \\ -10x + 5z - 5 = 0 \end{cases}$ получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -10 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 - (-2) \cdot (-10) = 20 - 20 = 0.$$

Следовательно, система не может быть решена матричным методом.

Тема 6: Квадратичные формы

1. Матрице $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ соответствует квадратичная форма $f(x_1;x_2;x_3)$, равная …

$-4x_1^2+4x_1x_2+2x_1x_3+5x_2^2-2x_2x_3+3x_3^2$ - правильно

$-4x_1^2+4x_1x_2+2x_1x_3+5x_2^2+2x_2x_3+3x_3^2$

$-4x_1^2+2x_1x_2+x_1x_3+5x_2^2-x_2x_3+3x_3^2$

$-4x_1^2+2x_1x_2+x_1x_3+5x_2^2+x_2x_3+3x_3^2$

Решение:

Слагаемые из формы можно представить в виде $\alpha\cdot x_ix_j=(a_{ij}+a_{ji})\cdot x_ix_j=a_{ij}\cdot x_ix_j+a_{ji}\cdot x_jx_i,\ \ i\neq j$. Они соответствуют как i-строке и j-столбцу, так и j-строке и i-столбцу матрицы в силу того, что $\alpha\cdot x_ix_j=\alpha\cdot x_jx_i$, поэтому на каждой из двух позиций *ij* и *ji* матрицы записывается по $\frac{\alpha}{2}$. Соответственно, коэффициенты формы при квадратах неизвестных, то есть $x_i^2=x_ix_i$, записываются на главной диагонали. Для данной формы элементы матрицы равны:

$a_{11}=-4;\ a_{12}=2;\ a_{13}=1;\ a_{21}=2;\ a_{22}=5;\ a_{23}=-1;\ a_{31}=1;\ a_{32}=-1;a_{33}=3.$

Следовательно, данная квадратичная форма имеет вид

$f(x_1;x_2;x_3)=-4x_1^2+4x_1x_2+2x_1x_3+5x_2^2-2x_2x_3+3x_3^2.$

2. Матрица квадратичной формы

$f(x_1;x_2;x_3)=x_1^2+2x_1x_2+3x_2^2+10x_2x_3+x_3^2$

имеет вид …

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ - правильно

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 10 \\ 0 & 10 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0{,}5 & 1 & 0 \\ 1 & 1{,}5 & 5 \\ 0 & 5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 5 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

Решение:

Матрица квадратичной формы симметрична относительно главной диагонали. Слагаемые из формы можно представить в виде

$\alpha\cdot x_ix_j=(a_{ij}+a_{ji})\cdot x_ix_j=a_{ij}\cdot x_ix_j+a_{ji}\cdot x_jx_i,\ \ i\neq j$. Они соответствуют как i-строке и j-столбцу, так и j-строке и i-столбцу матрицы в силу того, что $\alpha \cdot x_i x_j = \alpha \cdot x_j x_i$, поэтому на каждой из двух позиций ij и ji матрицы записывается по $\frac{\alpha}{2}$. Соответственно коэффициенты формы при квадратах неизвестных, то есть $x_i^2 = x_i x_i$, записываются на главной диагонали. Для данной формы элементы матрицы

$a_{11} = 1, a_{12} = 1, a_{21} = 1, a_{22} = 3, \quad a_{13} = a_{31} = 0, a_{23} = 5, a_{32} = 5, a_{33} = 1$.

Следовательно, заданная квадратичная форма описывается матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Матрице $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ соответствует квадратичная форма $f(x_1; x_2; x_3)$, равная …

$-2x_1^2 + 2x_1x_3 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 - 5x_3^2$ - правильно

$-2x_1^2 + 2x_1x_3 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 - 5x_3^2$

$-2x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 - 5x_3^2$

$-2x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 - 5x_3^2$

4. Матрице $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ соответствует квадратичная форма $f(x_1; x_2; x_3)$, равная …

$-x_1^2 + 8x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2^2 - 4x_2x_3 + 5x_3^2$ - правильно

$-x_1^2 + 8x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$

$-x_1^2 + 4x_1x_2 + x_1x_3 + 3x_2^2 - 2x_2x_3 + 5x_3^2$

$-x_1^2 + 4x_1x_2 + x_1x_3 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 + 5x_3^2$

Решение:

Слагаемые из формы можно представить в виде

$\alpha \cdot x_i x_j = (a_{ij} + a_{ji}) \cdot x_i x_j = a_{ij} \cdot x_i x_j + a_{ji} \cdot x_j x_i, \quad i \neq j$. Они соответствуют как i-строке и j-столбцу, так и j-строке и i-столбцу матрицы в силу того, что $\alpha \cdot x_i x_j = \alpha \cdot x_j x_i$, поэтому на каждой из двух позиций *ij* и *ji* матрицы записывается по $\frac{\alpha}{2}$. Соответственно, коэффициенты формы при квадратах неизвестных, то есть $x_i^2 = x_i x_i$, записываются на главной диагонали. Для данной формы элементы матрицы равны:

$a_{11} = -1; a_{12} = 4; a_{13} = 1; a_{21} = 4; a_{22} = 3; a_{23} = -2; a_{31} = 1; a_{32} = -2; a_{33} = 5.$

Следовательно, данная квадратичная форма имеет вид

$f(x_1; x_2; x_3) = -x_1^2 + 8x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2^2 - 4x_2x_3 + 5x_3^2.$

5. Матрице $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ соответствует квадратичная форма $f(x_1; x_2)$, равная …

$3x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2$ - правильно

$3x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2$

$3x_1^2 - x_1x_2 + 5x_2^2$

$3x_1^2 + x_1x_2 + 5x_2^2$

6. Матрица квадратичной формы

$f(x_1; x_2; x_3) = 4x_1^2 + 16x_1x_2 + 3x_2^2 + 10x_2x_3 + 9x_3^2$

имеет вид …

$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 8 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ - правильно

$\begin{pmatrix} 4 & 16 & 0 \\ 16 & 3 & 10 \\ 0 & 10 & 9 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 8 & 1{,}5 & 5 \\ 0 & 5 & 4{,}5 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & \sqrt{3} & \sqrt{10} \\ 0 & \sqrt{10} & 3 \end{pmatrix}$

Решение:

Матрица квадратичной формы симметрична относительно главной диагонали. Слагаемые из формы можно представить в виде $\alpha \cdot x_i x_j = (a_{ij} + a_{ji}) \cdot x_i x_j = a_{ij} \cdot x_i x_j + a_{ji} \cdot x_j x_i,\ \ i \neq j$. Они соответствуют как i-строке и j-столбцу, так и j-строке и i-столбцу матрицы в силу того, что $\alpha \cdot x_i x_j = \alpha \cdot x_j x_i$, поэтому на каждой из двух позиций ij и ji матрицы записывается по $\frac{\alpha}{2}$. Соответственно коэффициенты формы при квадратах неизвестных, то есть $x_i^2 = x_i x_i$, записываются на главной диагонали. Для данной формы элементы матрицы

$a_{11} = 4, a_{12} = 8, a_{21} = 8, a_{22} = 3,\ \ a_{13} = a_{31} = 0, a_{23} = 5, a_{32} = 5, a_{33} = 9.$

Следовательно, заданная квадратичная форма описывается матрицей $\begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 8 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 9 \end{pmatrix}$.

7. Матрица квадратичной формы $f(x_1; x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2$ имеет вид …

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ - правильно

$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & \sqrt{6} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0{,}5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

8. Матрица квадратичной формы $f(x_1;x_2)=x_1^2+16x_1x_2+9x_2^2$ имеет вид …

$\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$ - правильно

$\begin{pmatrix} 1 & 16 \\ 16 & 9 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0{,}5 & 8 \\ 8 & 4{,}5 \end{pmatrix}$

Решение:

Матрица квадратичной формы симметрична относительно главной диагонали. Слагаемые из формы можно представить в виде $\alpha \cdot x_i x_j = (a_{ij} + a_{ji}) \cdot x_i x_j = a_{ij} \cdot x_i x_j + a_{ji} \cdot x_j x_i,\ \ i \neq j$. Они соответствуют как i-строке и j-столбцу, так и j-строке и i-столбцу матрицы в силу того, что $\alpha \cdot x_i x_j = \alpha \cdot x_j x_i$, поэтому на каждой из двух позиций ij и ji матрицы записывается по $\frac{\alpha}{2}$. Соответственно коэффициенты формы при квадратах неизвестных, то есть $x_i^2 = x_i x_i$, записываются на главной диагонали. Для данной формы элементы матрицы $a_{11}=1, a_{12}=8, a_{21}=8, a_{22}=9.$ Следовательно, заданная квадратичная форма описывается матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Тема 7: Линейные операции над векторами

1. Даны три вектора: $\overline{a}=(-4;6;-1)$, $\overline{b}=(2;-4;1)$ и $\overline{c}=(-3;5;-1)$. Тогда вектор $\overline{a}+\lambda\overline{b}-2\overline{c}=\overline{0}$ при λ, равном …

– 1

1

0

– 2

Решение:

Для того чтобы умножить вектор на число, надо умножить на это число его координаты, а для того чтобы сложить или вычесть векторы, надо сложить или вычесть их соответствующие координаты. Два вектора называются равными, если равны их соответствующие координаты. В нашем случае

$$\bar{a} + \lambda\bar{b} - 2\bar{c} = (-4 + 2\lambda + 6; 6 - 4\lambda - 10; -1 + \lambda + 2) =$$
$$= (2 + 2\lambda; -4 - 4\lambda; 1 + \lambda) = \bar{0} = (0; 0; 0).$$

Следовательно, $\lambda = -1$.

2. Даны три точки: $A = (2; -1; 0)$, $B = (3; 1; 2)$ и $C = (-2; 0; 4)$. Тогда вектор $\overline{AB} - \overline{BC}$ имеет координаты …

(6; 3; 0)
(– 4; 1; 4)
(4; – 1; – 4)
(3; 0; 6)

Решение:

Для того чтобы найти координаты вектора, надо из координат конца вычесть координаты начала. В нашем случае

$$\overline{AB} = (3 - 2; 1 - (-1); 2 - 0) = (1; 2; 2),$$
$$\overline{BC} = (-2 - 3; 0 - 1; 4 - 2) = (-5; -1; 2).$$

Для того чтобы вычесть из одного вектора другой, надо вычесть из координат первого вектора соответствующие координаты второго, то есть

$$\overline{AB} - \overline{BC} = (1; 2; 2) - (-5; -1; 2) = (6; 3; 0).$$

3. Даны три вектора: $\bar{a} = (-2; 3; 1)$, $\bar{b} = (2; -3; -4)$ и $\bar{c} = (-1; 5; -2)$. Тогда вектор $3\bar{a} - 2\bar{b} + 4\bar{c}$ имеет координаты …

(– 14; 35; 3)
(– 6; 23; – 13)
(– 5; 5; 2)
(6; 10; 8)

Решение:

Для того чтобы умножить вектор на число, надо умножить на это число его координаты, а для того чтобы сложить или вычесть векторы, надо сложить или вычесть их соответствующие координаты. В нашем случае

$$3\bar{a} - 2\bar{b} + 4\bar{c} = 3\cdot(-2; 3; 1) - 2\cdot(2; -3; -4) + 4\cdot(-1; 5; -2) =$$
$$= (-6; 9; 3) - (4; -6; -8) + (-4; 20; -8) = (-14; 35; 3).$$

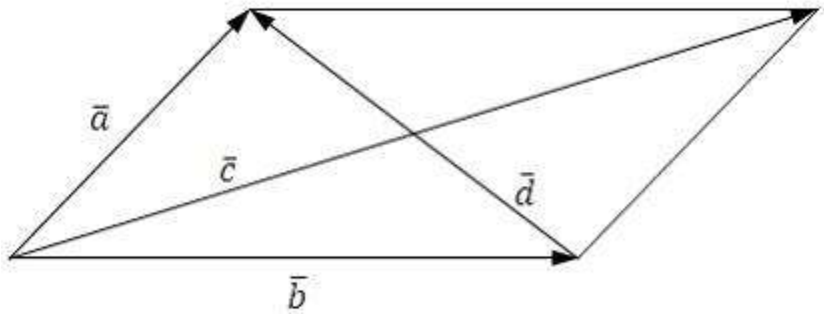
4. В треугольнике ABC $\overline{AB} = (3; -1; 2)$, $\overline{AC} = (2; 2; 3)$. Тогда вектор $\overline{BC}$ имеет координаты …

(– 1; 3; 1)
(1; – 3; – 1)
(5; 1; 5)
(6; – 2; 6)

Решение:

По «правилу треугольника» $\overline{BC}=\overline{AC}-\overline{AB}$. Следовательно,
$\overline{BC}=(2;2;3)-(3;-1;2)=(-1;3;1)$.

5. Векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ и $\overline{d}$ изображены на рисунке.



Тогда вектор $\overline{a}-\overline{b}-\overline{d}$ будет равен …
$\overline{0}$ - правильно
$\overline{c}$
$-\overline{c}$
$2\overline{a}$
Решение:

По правилу треугольника $\overline{b}+\overline{d}=\overline{a}$. Следовательно, $\overline{a}-(\overline{b}+\overline{d})=\overline{a}-\overline{a}=\overline{0}$.

6. Даны четыре вектора: $\overline{a}=(-4;1;0)$, $\overline{b}=(-2;1;0)$, $\overline{c}=(-1;0;1)$ и $\overline{d}=(x;y;z)$.
Тогда векторы $2\overline{a}+3\overline{b}$ и $5\overline{c}-\overline{d}$ будут равны, если вектор $\overline{d}$ имеет координаты …
(9; – 5; 5)
(5; – 2; 1)
(– 9; 5; – 5)
(– 7; 2; 1)
Решение:

Так как $2\overline{a}+3\overline{b}=5\overline{c}-\overline{d}$, то $\overline{d}=5\overline{c}-2\overline{a}-3\overline{b}$. Для того чтобы умножить вектор на число, надо умножить на это число его координаты, а для того чтобы сложить или вычесть векторы, надо сложить или вычесть их соответствующие координаты. В нашем случае
$\overline{d}=5\overline{c}-2\overline{a}-3\overline{b}=5\cdot(-1;0;1)-2\cdot(-4;1;0)-3\cdot(-2;1;0)=$
$=(-5;0;5)-(-8;2;0)-(-6;3;0)=(9;-5;5)$.

7. Дан параллелограмм $ABCD$. Векторы $\overline{AB}=(2;-3;4)$, $\overline{AD}=(-1;2;3)$. Тогда вектор $\overline{AC}+\overline{BD}$ имеет координаты …
(– 2; 4; 6)
(4; – 6; 8)
(1; – 1; 7)

(– 3; 5; – 1)

Тема 8: Скалярное произведение векторов

1. Даны точки $A(-1;2;-3)$, $B(0;-1;2)$, $C(-2;3;2)$ и $D(0;\lambda;1)$. Тогда векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ будут перпендикулярны при λ, равном …

2

– 2

1

0

Решение:

Вектора $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ будут перпендикулярны, если их скалярное произведение равно нулю. Скалярное произведение векторов $\overline{AB}=(a_1;a_2;a_3)$ и $\overline{CD}=(b_1;b_2;b_3)$, заданных своими координатами, равно:

$\overline{AB}\cdot\overline{CD}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3$.

В нашем случае $\overline{AB}=(1;-3;5)$, $\overline{CD}=(2;\lambda-3;-1)$ и

$\overline{AB}\cdot\overline{CD}=1\cdot 2+(-3)\cdot(\lambda-3)+5\cdot(-1)=6-3\cdot\lambda=0.$ Откуда $\lambda=2$.

2. В ортонормированном базисе заданы векторы $\overline{a}=(2;4;k;-1)$ и $\overline{b}=(1;3;-1;2)$. Тогда их скалярное произведение будет равно 10 при k, равном …

2

0

– 2

12

Решение:

Скалярное произведение векторов $\overline{a}=(a_1;a_2;a_3;a_4)$ и $\overline{b}=(b_1;b_2;b_3;b_4)$ можно определить как

$\overline{a}\cdot\overline{b}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3+a_4\cdot b_4$.

В нашем случае $\overline{a}\cdot\overline{b}=2\cdot 1+4\cdot 3+k\cdot(-1)-1\cdot 2=10$, то есть $-k=-2$ и $k=2$.

3. Угол между векторами $\overline{a}=(5;-3;1)$ и $\overline{b}=(2;1;-7)$, заданными в ортонормированном базисе, равен …

$\frac{\pi}{2}$ - правильно

$\frac{\pi}{3}$

$\frac{\pi}{4}$

$\frac{\pi}{6}$

4. В ортонормированном базисе заданы векторы $\overline{a} = (-5; 2; 1; -2)$ и $\overline{b} = (2; 4; 1; -7)$. Тогда их скалярное произведение будет равно …

13

0

8

– 4

Решение:

Скалярное произведение векторов $\overline{a} = (a_1; a_2; a_3; a_4)$ и $\overline{b} = (b_1; b_2; b_3; b_4)$, заданных своими координатами, равно

$\overline{a} \cdot \overline{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 + a_4 \cdot b_4$.

В нашем случае $\overline{a} \cdot \overline{b} = -5 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-7) = 13$.

5. Дан вектор $\overline{a} = \overline{p} - 2\overline{q}$, где $\|\overline{p}\| = 3$, $\|\overline{q}\| = \sqrt{2}$, угол между векторами $\overline{p}$ и $\overline{q}$ равен $\frac{\pi}{4}$. Тогда модуль вектора $\overline{a}$ будет равен …

$\sqrt{5}$ - правильно

$3\sqrt{2}$

$3 - 2\sqrt{2}$

3

Решение:

Так как $\|\overline{a}\| = \sqrt{(\overline{a}, \overline{a})}$, то

$$\|\overline{a}\| = \sqrt{(\overline{a}, \overline{a})} = \sqrt{(\overline{p} - 2\overline{q})^2} = \sqrt{\|\overline{p}\|^2 - 4 \cdot \|\overline{p}\| \cdot \|\overline{q}\| \cdot \cos\frac{\pi}{4} + 4 \cdot \|\overline{q}\|^2} =$$

$$= \sqrt{9 - 4 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 4 \cdot 2} = \sqrt{5}.$$

6. Даны точки $A(-2; 0; 1)$, $B(2; -2; 3)$, $C(-1; -3; 0)$ и $D(1; 0; -2)$. Тогда скалярное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$ будет равно …

2

– 2

1

– 3

Решение:

Скалярное произведение векторов $\overline{AB} = (a_1; a_2; a_3)$ и $\overline{DC} = (b_1; b_2; b_3)$, заданных своими координатами, равно

$\overline{AB} \cdot \overline{DC} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$.

В нашем случае $\overline{AB} = (4; -2; 2)$, $\overline{DC} = (-2; -3; 2)$ и

$\overline{AB} \cdot \overline{DC} = 4 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-3) + 2 \cdot 2 = 2$.

Тема 9: Векторное произведение векторов

1. Площадь треугольника, построенного на векторах $\overline{a} = \overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$ и $\overline{b} = \overline{i} + \overline{k}$, равна …

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ - правильно

$\sqrt{2}$

0

1

Решение:

Площадь S треугольника, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, равна $\frac{1}{2}$ модуля векторного произведения этих векторов, то есть $S = \frac{1}{2}\left|\left[\overline{a}, \overline{b}\right]\right|$. В нашем случае

$$\left[\overline{a}, \overline{b}\right] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \overline{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \overline{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \overline{k} = -\overline{i} + \overline{k}.$$

Следовательно, площадь треугольника равна

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left|\left[\overline{a}, \overline{b}\right]\right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2. Площадь треугольника с вершинами в точках $A(1;1)$, $B(-5;4)$ и $C(-2;5)$ равна …

7,5

15

5

2,5

Решение:

Площадь *S* треугольника *ABC* равна $\frac{1}{2}$ модуля векторного произведения векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, то есть $S = \frac{1}{2} \cdot \left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right|$. В нашем случае $\overline{AB} = (-5-1;\ 4-1) = (-6;3)$, $\overline{AC} = (-2-1; 5-1) = (-3;4)$. Тогда $\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -6 & 3 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -15\overline{k}$ и

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |-15| = 7{,}5.$$

3. Даны три точки $A(-2;1;3)$, $B(0;2;5)$ и $C(-3;0;1)$. Тогда векторное произведение векторов $\overline{AB} \times \overline{AC}$ равно …

$(0;2;-1)$ - правильно

$(0;-2;1)$

$(2;1;2)$
$(-1;-1;-2)$
Решение:
Векторное произведение двух векторов $\bar{a}=(a_1;a_2;a_3)$ и $\bar{b}=(b_1;b_2;b_3)$, заданных своими координатами, находится по формуле

$$[\bar{a},\bar{b}]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\cdot\bar{i}-\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\cdot\bar{j}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\cdot\bar{k}.$$

В нашем случае $\overline{AB}=(0-(-2);2-1;5-3)=(2;1;2)$,
$\overline{AC}=(-3-(-2);0-1;1-3)=(-1;-1;-2)$.

Тогда $$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & 1 & 2\\ -1 & -1 & -2\end{vmatrix}=0\cdot\bar{i}+2\cdot\bar{j}-1\cdot\bar{k}=(0;2;-1).$$

4. Векторное произведение векторов $\bar{a}=3\cdot\bar{p}+2\cdot\bar{q}$ и $\bar{b}=2\cdot\bar{p}-4\cdot\bar{q}$ равно …
$-16\cdot\bar{p}\times\bar{q}$ - правильно
$-8\cdot\bar{p}\times\bar{q}$
$16\cdot\bar{p}\times\bar{q}$
$-2-16\cdot\bar{p}\times\bar{q}$
Решение:
Вычислим
$\bar{a}\times\bar{b}=(3\cdot\bar{p}+2\cdot\bar{q})\times(2\cdot\bar{p}-4\cdot\bar{q})=6\cdot\bar{p}\times\bar{p}-12\cdot\bar{p}\times\bar{q}+$
$+4\cdot\bar{q}\times\bar{p}-8\cdot\bar{q}\times\bar{q}.$
Так как $\bar{p}\times\bar{p}=\bar{0},\ \bar{q}\times\bar{q}=\bar{0},\ \bar{q}\times\bar{p}=-\bar{p}\times\bar{q},$ то $\bar{a}\times\bar{b}=-16\cdot\bar{p}\times\bar{q}.$

5. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}=-\bar{j}+\bar{k}$ и $\bar{b}=\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$, равна …
$\sqrt{6}$ - правильно
$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$
3
6
Решение:
Площадь S параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, равна модулю векторного произведения этих векторов, то есть $S=\left|[\bar{a},\bar{b}]\right|.$ В нашем случае

$$[\bar{a},\bar{b}]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\cdot\bar{i}-\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\cdot\bar{j}+\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\cdot\bar{k}=-2\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}.$$

Следовательно, площадь параллелограмма равна
$\left|\left[\bar{a},\bar{b}\right]\right| = \sqrt{(-2)^2+1^2+1^2} = \sqrt{6}.$

6. Даны два вектора $\bar{a} = 2\bar{p} - 3\bar{q}$ и $\bar{b} = \bar{p} + 2\bar{q}$, где $|\bar{p}| = 3$, $|\bar{q}| = 2$, угол между векторами $\bar{p}$ и $\bar{q}$ равен $\frac{\pi}{6}$. Тогда модуль векторного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ будет равен …

21

$21\sqrt{3}$

42

$7\sqrt{3}$

Решение:

Вычислим

$\bar{a}\times\bar{b} = (2\bar{p} - 3\bar{q})\times(\bar{p} + 2\bar{q}) = 2\cdot\bar{p}\times\bar{p} + 4\cdot\bar{p}\times\bar{q} - 3\cdot\bar{q}\times\bar{p} - 6\cdot\bar{q}\times\bar{q}.$

Так как $\bar{p}\times\bar{p} = \bar{0}$, $\bar{q}\times\bar{q} = \bar{0}$, $\bar{q}\times\bar{p} = -\bar{p}\times\bar{q}$, то $\bar{a}\times\bar{b} = 7\cdot\bar{p}\times\bar{q}.$

Тогда $\left|\bar{a}\times\bar{b}\right| = 7\cdot|\bar{p}|\cdot|\bar{q}|\cdot\sin\frac{\pi}{6} = 7\cdot 3\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = 21.$

Тема 10: Смешанное произведение векторов

1. Векторы $\bar{a} = (-2;\alpha;-1)$, $\bar{b} = (4;2;3)$ и $\bar{c} = (2;-1;2)$ компланарны, если параметр α равен …

– 3

3

6

– 2

Решение:

Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ компланарны, если их смешанное произведение равно 0. Смешанное произведение векторов $\bar{a} = (a_1;a_2;a_3)$, $\bar{b} = (b_1;b_2;b_3)$ и $\bar{c} = (c_1;c_2;c_3)$, заданных своими координатами, находится по формуле

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

В нашем случае $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} -2 & \alpha & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -6 - 2\alpha,$ то есть векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ компланарны при $\alpha = -3$.

2. Векторы $\bar{a} = (0;3;0)$, $\bar{b} = (-2;-3;1)$ и $\bar{c} = (\alpha;-1;3)$ линейно зависимы, если параметр α равен …

– 6

2
– 18
6
Решение:
Векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ линейно зависимы, если их смешанное произведение равно 0.
Вычислим смешанное произведение векторов $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ и $\overline{c} = (c_1, c_2, c_3)$, заданных своими координатами, по формуле
$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$
В нашем случае
$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ \alpha & -1 & 3 \end{vmatrix} = 18 + 3\alpha,$$
то есть вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ линейно зависимы при $\alpha = -6$.

3. Точки $A(1;-2;3)$, $B(3;1;-1)$, $C(1;2;-5)$ и $D(1;-1;\alpha)$ лежат в одной плоскости, если параметр α равен …
1
0
3
– 1
Решение:
Точки $A(1;-2;3)$, $B(3;1;-1)$, $C(1;2;-5)$ и $D(1;-1;\alpha)$ лежат в одной плоскости, если векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$ компланарны, то есть если их смешанное произведение равно 0.
Смешанное произведение векторов $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ и $\overline{c} = (c_1, c_2, c_3)$, заданных своими координатами, находится по формуле
$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$
В нашем случае $\overline{a} = \overline{AB} = (3-1; 1+2; -1-3) = (2;3;-4)$,
$\overline{b} = \overline{AC} = (1-1; 2+2; -5-3) = (0;4;-8)$,
$\overline{c} = \overline{AD} = (1-1; -1+2; \alpha-3) = (0;1;\alpha-3)$ и
$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & \alpha-3 \end{vmatrix} = 8\cdot(\alpha-3) + 16 = 8\alpha - 8,$$
то есть точки *A, B, C* и *D* лежат в одной плоскости при $\alpha = 1$.

4. Векторы $\overline{a} = (2;0;3)$, $\overline{b} = (-1;3;0)$ и $\overline{c} = (0;4;\lambda)$ лежат в одной плоскости, если параметр λ равен …
2
6
– 12
– 2

Решение:

Векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ лежат в одной плоскости, если их смешанное произведение равно 0.

Смешанное произведение векторов $\overline{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\overline{b} = (b_1; b_2; b_3)$ и $\overline{c} = (c_1; c_2; c_3)$, заданных своими координатами, находится по формуле

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

В нашем случае $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & \lambda \end{vmatrix} = 6 \cdot \lambda - 12,$ то есть векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ лежат в одной плоскости при $\lambda = 2$.

5. Объем пирамиды, построенной на векторах $\overline{a} = (-2; 1; 3)$, $\overline{b} = (3; -1; 2)$ и $\overline{c} = (3; 5; -4)$, равен …

14

84

28

42

6. Смешанное произведение векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$, взятых в указанном порядке, равно 3. Тогда смешанное произведение векторов $3\overline{a}$, $2\overline{c}$ и $(-2\overline{b})$ равно …

36

– 36

3

– 12

Решение:

По свойствам смешанного произведения

$$3\overline{a} \cdot 2\overline{c} \cdot (-2\overline{b}) = -12 \cdot \overline{a} \cdot \overline{c} \cdot \overline{b} = 12 \cdot \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} = 12 \cdot 3 = 36.$$

Тема 11: Прямоугольные координаты на плоскости

1. Даны точки $A(-1; -3)$ и $B(4; 2)$. Тогда угол между прямой, проходящей через эти точки, и положительным направлением оси *Ox* равен …

$\frac{\pi}{4}$ - правильно

$\frac{\pi}{2}$

$\frac{3\pi}{4}$

$\frac{5\pi}{4}$

2. Расстояние от точки $A(x;\ y)$, лежащей на оси абсцисс, до точки $B(2;\ -3)$ равно 3. Тогда точка $A(x;\ y)$ имеет координаты …

$(2;\ 0)$ - правильно

$(5;\ 0)$

$(-2;\ 0)$

$(-10;\ 0)$

Решение:

Так как точка $A(x;\ y)$ лежит на оси абсцисс, то ее ордината $y = 0.$ Тогда расстояние между точками $A(x;\ 0)$ и $B(2;\ -3)$ можно определить как $\sqrt{(2-x)^2 + (-3-0)^2} = 3,$ или $(2-x)^2 + 9 = 9.$ Отсюда $x = 2.$

3. Даны точки $A(-3;-1)$ и $B(0;-2).$ Тогда координаты точки $C(x;y),$ симметричной точке *B* относительно точки *A*, равны …

$(-6;0)$ - правильно

$(-3;-3)$

$(-3;1)$

$(-6;-2)$

Решение:

Воспользуемся формулой деления отрезка пополам. Координаты точки $M(x,y),$ делящей отрезок между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ пополам, находятся по формулам $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2};\ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}.$ Тогда координаты точки $C(x;y)$ находятся как $-3 = \dfrac{x+0}{2};\ -1 = \dfrac{y+(-2)}{2},$ то есть точка $C(x;y)$ имеет координаты $(-6;0).$

4. Точка $M(x;y)$ лежит на оси абсцисс и равноудалена от точки $B(-1;-2)$ и начала координат. Тогда точка *M* имеет координаты …

$(-2{,}5;\ 0)$ - правильно

$(0;\ -2{,}5)$

$(2{,}5;\ 0)$

$(-0{,}5;-1)$

Решение:

Так как точка $M(x;y)$ лежит на оси абсцисс, то ее ордината $y = 0.$ Так как точка $M(x;0)$ равноудалена от точки $B(-1;-2)$ и начала координат $O(0;0),$ то расстояния от точки *M* до точек $B(-1;-2)$ и $O(0;0)$ равны. Тогда

$\sqrt{(x-(-1))^2+(0-(-2))^2}=\sqrt{(x-0)^2+(0-0)^2}$, или $(x+1)^2+4=x^2$,
$x^2+2x+5=x^2$, то есть $x=-2{,}5$.

5. Даны точки $A(2;3)$ и $B(-5;1)$. Тогда координаты точки $C(x;y)$, делящей отрезок *AB* в отношении 2:1, равны …

$\left(-\frac{8}{3};\frac{5}{3}\right)$ - правильно

$\left(-\frac{3}{2};2\right)$

$\left(-\frac{1}{3};\frac{7}{3}\right)$

$\left(4;\frac{1}{3}\right)$

Решение:

Координаты точки $C(x;y)$, делящей отрезок *AB* в отношении λ, находятся по формулам $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$. Тогда $x=\frac{2+2\cdot(-5)}{1+2}=-\frac{8}{3};\ y=\frac{3+2\cdot 1}{1+2}=\frac{5}{3}$, то есть точка $C(x;y)$ имеет координаты $\left(-\frac{8}{3};\frac{5}{3}\right)$.

6. Точки $A(1;-1)$, $B(3;1)$ и $C(4;2)$ лежат на одной прямой. Тогда точка *B* делит отрезок *AC* в отношении …

$\lambda=2:1$ - правильно

$\lambda=4:1$

$\lambda=3:1$

$\lambda=3:2$

Решение:

Делением отрезка A_1A_2 в заданном отношении λ называется поиск такой точки *A* на отрезке A_1A_2, которая удовлетворяет соотношению $\frac{|A_1A|}{|AA_2|}=\lambda$. Тогда искомый параметр λ будет равен

$$\lambda=\frac{|AB|}{|BC|}=\frac{\sqrt{(3-1)^2+(1-(-1))^2}}{\sqrt{(4-3)^2+(2-1)^2}}=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}=2.$$

7. Даны вершины треугольника $A(1;-3)$, $B(7;5)$ и $C(4;1)$. Тогда периметр треугольника *ABC* равен …
20
9
10
15
Решение:

Периметр треугольника можно найти по формуле $p = |AB| + |BC| + |AC|$.
Найдем длины сторон треугольника как расстояния между точками *A, B* и *C*. Расстояние между двумя точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ находится по формуле $|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Тогда расстояние между точками *A* и *B* можно найти как $|AB| = \sqrt{(7-1)^2 + (5-(-3))^2} = 10$. Расстояние между точками *A* и *C* будет равно $|AC| = \sqrt{(4-1)^2 + (1-(-3))^2} = 5$, аналогично $|BC| = \sqrt{(4-7)^2 + (1-5)^2} = 5$.
Тогда периметр треугольника *ABC* равен $p = 10 + 5 + 5 = 20$.

Тема 12: Полярные координаты

1. Точка с полярным радиусом $r = 2$ лежит на кривой $r = \dfrac{1}{\sin\varphi}$. Тогда прямоугольные координаты точки равны …
$(\sqrt{3}; 1)$ - правильно
$(-2\sqrt{3}; 2)$
$(\sqrt{3}; -1)$
$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$
Решение:

Так как точка лежит на кривой $r = \dfrac{1}{\sin\varphi}$, то выполняется равенство $2 = \dfrac{1}{\sin\varphi}$. Отсюда $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$. Прямоугольные координаты точки определяются формулами:

$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, то есть $\begin{cases} x = 2 \cdot \cos\dfrac{\pi}{6} = \sqrt{3} \\ y = 2 \cdot \sin\dfrac{\pi}{6} = 1 \end{cases}$.

2. В полярной системе координат даны точки $A\left(8; \dfrac{11\pi}{6}\right)$ и $B\left(6; \dfrac{\pi}{3}\right)$. Тогда расстояние между ними равно …
10

2
28
14

3. Одна из вершин треугольника находится в полюсе *O*, две другие имеют координаты $A\left(3;\frac{11\pi}{15}\right)$ и $B\left(8;\frac{19\pi}{10}\right)$. Тогда площадь треугольника *AOB* равна …

6

$24\sqrt{3}$

$6\sqrt{3}$

12

Решение:

Площадь треугольника можно вычислить по формуле $S=\frac{1}{2}OA\cdot OB\cdot\sin\varphi,$ где φ – угол между сторонами *OA* и *OB*. Тогда $S=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 8\cdot\sin\left(\frac{11\pi}{15}+\left(2\pi-\frac{19\pi}{10}\right)\right)=6.$

4. В полярной системе координат даны две точки $A\left(3;\frac{7\pi}{6}\right)$ и $B\left(9;\frac{\pi}{6}\right)$. Тогда полярные координаты середины отрезка *AB* равны …

$\left(3;\frac{\pi}{6}\right)$ - правильно

$\left(6;\frac{4\pi}{3}\right)$

$(6;\pi)$

$\left(3;\frac{7\pi}{6}\right)$

Решение:

Точки *A* и *B* в полярной системе координат лежат на одной прямой. Длина отрезка *AB* равна 12. Середина отрезка лежит на луче $\varphi=\frac{\pi}{6}$ и удалена от полюса на 3 ед.

Следовательно, полярные координаты середины отрезка *AB* равны $\left(3;\frac{\pi}{6}\right)$.

5. Уравнение прямой линии $x-y-1=0$ в полярных координатах имеет вид …

$r=\frac{1}{\cos\varphi-\sin\varphi}$ - правильно

$r = -\dfrac{1}{\cos\varphi + \sin\varphi}$

$r = \dfrac{1}{\sin\varphi - \cos\varphi}$

$r = \dfrac{1}{\cos\varphi + \sin\varphi}$

Решение:

Перейти от прямоугольных координат к полярным можно по формулам $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$.

Тогда уравнение прямой примет вид $r\cos\varphi - r\sin\varphi - 1 = 0$, или $r = \dfrac{1}{\cos\varphi - \sin\varphi}$.

6. В полярной системе координат уравнение кривой имеет вид $r = \dfrac{9}{5 + 4cos\varphi}$. Тогда эта кривая определяет …

эллипс

параболу

гиперболу

окружность

Решение:

Перейдем в уравнении кривой к декартовым координатам. Используя формулы взаимосвязи между полярными и декартовыми системами координат $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, получим $\cos\varphi = \dfrac{x}{r} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Тогда $\sqrt{x^2 + y^2} = \dfrac{9}{5 + 4 \cdot \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}$, или $5\sqrt{x^2 + y^2} = 9 - 4x$. Возводя обе части уравнения в квадрат и приводя подобные слагаемые, будем иметь $9x^2 + 72x + 25y^2 - 81 = 0$. Перепишем в виде $9\left(x^2 + 8x + 16\right) + 25y^2 = 225$, или $\dfrac{(x+4)^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. А это уравнение эллипса.

7. Кривая в полярной системе координат задана уравнением $r = 2\cos\varphi$. Тогда ее уравнение в прямоугольной системе координат имеет вид …

$(x-1)^2 + y^2 = 1$ - правильно

$(x+1)^2 + y^2 = 1$

$x^2 + (y-1)^2 = 1$

$x^2 + y^2 = 2$

Решение:
Перейдем в уравнении кривой к декартовым координатам. Используя формулы взаимосвязи между полярными и декартовыми системами координат $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, получим

$\cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Тогда $\sqrt{x^2+y^2} = 2\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, или $x^2+y^2=2x$.

Выделим в этом уравнении полный квадрат относительно *x*: $(x^2-2x+1)+y^2=1$.

Тогда $(x-1)^2+y^2=1$.

А это уравнение окружности с центром в точке $(1;0)$ и радиусом 1.

Тема 13: Прямая на плоскости

1. Даны уравнения прямых:

A) $3x-4y+1=0,\ 5x+y-3=0.$

B) $3x-y+5=0,\ x+3y-1=0.$

C) $4x+y+3=0,\ x-5y+1=0.$

D) $x+4y-3=0,\ 4x+y+5=0.$

Тогда перпендикулярна пара прямых …

B

C

A

D

Решение:

Условие перпендикулярности прямых $A_1x+B_1y+C=0$ и $A_2x+B_2y+C=0$ может быть записано в виде $A_1A_2+B_1B_2=0$. Данному условию удовлетворяет пара прямых $3x-y+5=0$ и $x+3y-1=0$.

2. Угловой коэффициент прямой, проходящей через точки $M_1(2;-5)$ и $M_2(3;2)$, равен …

7

$-\frac{5}{3}$

– 19

$\frac{1}{7}$

Решение:

Прямая, проходящая через две данные точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$, задается уравнением вида $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$. Тогда $\frac{y+5}{2+5}=\frac{x-2}{3-2}$, или $y=7x-19$. Угловой коэффициент данной прямой равен $k=7$.

3. Прямая отсекает на оси *Ox* отрезок $a=6$ и имеет угловой коэффициент $k=-\frac{1}{4}$. Тогда ее уравнение имеет вид …

$x+4y-6=0$ - правильно

$4x+y-6=0$

$4x+y+6=0$

$x-4y+6=0$

Решение:

Уравнение прямой, проходящей через точку $(x_0;y_0)$ с угловым коэффициентом k, имеет вид $y-y_0=k(x-x_0)$. Искомая прямая проходит через точку $(6;0)$. Тогда уравнение прямой запишется в виде $y-0=-\frac{1}{4}(x-6)$, или $\frac{1}{4}x+y-\frac{6}{4}=0$, то есть $x+4y-6=0$.

4. Прямая задана в параметрическом виде $\begin{cases}x=2t+1\\ y=-5t-3\end{cases}$. Тогда ее общее уравнение имеет вид …

$5x+2y+1=0$ - правильно

$2x+5y+1=0$

$5x-2y-1=0$

$5x-2y-11=0$

Решение:

Общее уравнение прямой на плоскости записывается в виде $Ax+By+C=0$. Выразив из системы уравнений $\begin{cases}x=2t+1\\ y=-5t-3\end{cases}$ параметр *t* как $t=\frac{x-1}{2}$ и $t=\frac{y+3}{-5}$, получаем $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-5}$, или $5x+2y+1=0$.

5. Даны точки $A(3;-2)$ и $B(-1;0)$. Тогда уравнение прямой, проходящей через точку $C(2;-6)$ и середину отрезка *AB*, имеет вид …

$5x+y-4=0$ - правильно

$2x-6y-1=0$

$x+4y-2=0$

$7x-y-8=0$

Решение:

6. Координаты середины отрезка AB равны $x = \frac{3-1}{2} = 1,\ y = \frac{-2+0}{2} = -1$. Прямая, проходящая через две данные точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$, задается уравнением вида $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$. Тогда $\frac{y-(-6)}{-1-(-6)} = \frac{x-2}{1-2}$, или $5x + y - 4 = 0$.

7. В треугольнике с вершинами $A(2;-1),\ B(-4;3),\ C(-2;-5)$ уравнение высоты, проведенной из вершины *C*, имеет вид …

$3x - 2y - 4 = 0$ - правильно

$3x - 2y + 4 = 0$

$2x - 3y - 11 = 0$

$2x - 3y + 11 = 0$

Решение:

Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через точку $M(x_0, y_0)$ перпендикулярно нормальному вектору $\vec{n}\,(m;p)$: $m(x-x_0) + p(y-y_0) = 0$. В качестве нормального вектора возьмем вектор $\overline{AB}(-6;4)$, а в качестве заданной точки возьмем точку $C(-2;-5)$. Тогда $-6(x-(-2)) + 4(y-(-5)) = 0$, или $3x - 2y - 4 = 0$.

8. Площадь треугольника, отсекаемого прямой $3x + 4y - 12 = 0$ от координатного угла, равна …

6

18

24

12

Решение:

Приведем уравнение прямой $3x + 4y - 12 = 0$ к уравнению прямой «в отрезках»: $3x + 4y = 12$, или $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$. Уравнение прямой «в отрезках», отсекающей на координатных осях *Ox* и *Oy* отрезки длиной *a* и *b* соответственно, имеет вид $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Следовательно, треугольник, отсекаемый прямой $3x + 4y - 12 = 0$ от координатного угла, – прямоугольный, с вершинами $O(0;0),\ A(4;0),\ B(0;3)$ и гипотенузой *AB*.

Площадь треугольника *AOB* будет равна $S = \frac{1}{2}|AO| \cdot |OB| = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$.

Тема 14: Кривые второго порядка

1. Вершина параболы $x^2-2x-2y-13=0$ имеет координаты …

$(1;-7)$ - правильно

$(1;7)$

$(-1;7)$

$(-1;-7)$

Решение:

Выделим в уравнении $x^2-2x-2y-13=0$ полный квадрат:

$(x^2-2x+1)-1-2y-13=0,$ или $(x-1)^2=2(y+7).$ Тогда вершина параболы имеет координаты $(1;-7).$

2. Центр окружности $x^2+y^2+6x-8y+9=0$ имеет координаты …

$(-3;4)$ - правильно

$(-3;-4)$

$(3;4)$

$(3;-4)$

Решение:

Окружность радиуса *R* с центром в точке $O(x_0;y_0)$ задается на плоскости уравнением $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2.$ Выделим в уравнении $x^2+y^2+6x-8y+9=0$ полные квадраты: $(x^2+6x+9)-9+(y^2-8y+16)-16+9=0,$ или $(x+3)^2+(y-4)^2=16.$

Тогда центр окружности имеет координаты $(-3;4).$

3. Радиус окружности $x^2+y^2-6x-8y+21=0$ равен …

2

$\sqrt{5}$

4

$2\sqrt{3}$

Решение:

Окружность радиуса *R* с центром в точке $O(x_0;y_0)$ задается на плоскости уравнением вида $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2.$ Выделим в уравнении $x^2+y^2-6x-8y+21=0$ полные квадраты:

$(x^2-6x+9)-9+(y^2-8y+16)-16+21=0,$ или $(x-3)^2+(y-4)^2=4.$

Тогда радиус окружности равен 2.

4. Асимптоты гиперболы $9x^2-4y^2-36=0$ задаются уравнениями …

$y = \pm\frac{3}{2}x$ - правильно

$y = \pm\frac{9}{4}x$

$y = \pm\frac{4}{9}x$

$y = \pm\frac{2}{3}x$

Решение:

Асимптоты гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ задаются уравнениями вида $y = \pm\frac{b}{a}x.$ Разделив обе части уравнения $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$ на 36, получим каноническое уравнение гиперболы $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1,$ то есть $a = \sqrt{4} = 2$ и $b = \sqrt{9} = 3.$ Тогда уравнения асимптот примут вид $y = \pm\frac{3}{2}x.$

5. Окружность с центром в точке $C(4;-3)$ проходит через начало координат. Тогда уравнение окружности имеет вид …

$(x-4)^2 + (y+3)^2 = 25$ - правильно

$(x+4)^2 + (y-3)^2 = 25$

$(x+4)^2 + (y-3)^2 = 10$

$(x-4)^2 + (y+3)^2 = 5$

Решение:

Окружность радиуса *R* с центром в точке $O(x_0; y_0)$ задается на плоскости уравнением $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2.$ Радиус окружности найдем как расстояние от точки $C(4;-3)$ до начала координат: $R = \sqrt{(4-0)^2 + (-3-0)^2} = 5.$ Тогда уравнение окружности примет вид $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 25.$

6. Фокусы эллипса имеют координаты $F_1(-4;0)$ и $F_2(4;0)$, а его эксцентриситет равен 0,8. Тогда длина меньшей полуоси эллипса равна …

3

2

4

5

Решение:

Каноническое уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; фокусы эллипса имеют координаты $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$, где $c=\sqrt{a^2-b^2}$, а эксцентриситет $\varepsilon=\frac{c}{a}$.

Тогда $0{,}8=\frac{4}{a}$, $a=5$, $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$.

7. Эксцентриситет гиперболы $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ равен …

1,25

0,8

0,6

6,25

Решение:

Эксцентриситет гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ вычисляется по формуле $\varepsilon=\frac{c}{a}$, где $c=\sqrt{a^2+b^2}$. Тогда $\varepsilon=\frac{\sqrt{16+9}}{4}=1{,}25$.

8. Уравнением кривой второго порядка $2x^2+5y^2+12x+8=0$ на плоскости определяется …

эллипс

гипербола

парабола

пара пересекающихся прямых

Решение:

Выделим в уравнении $2x^2+5y^2+12x+8=0$ полный квадрат по переменной *x*: $2(x^2+6x+9)-18+5y^2+8=0$, или $2(x+3)^2+5y^2=10$. Разделив обе части этого уравнения на 10, получим уравнение вида $\frac{(x+3)^2}{5}+\frac{y^2}{2}=1$, которое на плоскости определяет эллипс.

Тема 15: Прямоугольные координаты в пространстве

1. Даны точки $A(1;2;-3)$ и $C(4;-1;6)$. Тогда точка *B*, которая делит отрезок *AC* в отношении $2:1$, имеет координаты …

$(3;0;3)$ - правильно

$(2;1;0)$

$(2{,}5;0{,}5;1{,}5)$

$(1; 0{,}5; 0)$

2. Точки $A(-1; 4; -3)$, $B(1; 1; 4)$ и $C(-3; 7; -10)$ лежат на одной прямой. Тогда точка *B* делит отрезок *AC* в отношении …

$\lambda = 1:2$ - правильно

$\lambda = 1:4$

$\lambda = 4:1$

$\lambda = 2:1$

Решение:

Делением отрезка *AC* в заданном отношении λ называется поиск такой точки *B* на отрезке *AC*, которая удовлетворяет соотношению $\dfrac{|AB|}{|BC|} = \lambda.$ Тогда искомый параметр λ будет равен

$$\lambda = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{\sqrt{(1-(-1))^2 + (1-4)^2 + (4-(-3))^2}}{\sqrt{(-3-1)^2 + (7-1)^2 + (-10-4)^2}} = \frac{1}{2}.$$

3. Даны точки $A(3; -1; -3)$ и $B(2; -3; -1).$ Тогда длина отрезка *AB* равна …

3

$\sqrt{57}$

$\sqrt{33}$

1

Решение:

Расстояние между двумя точками $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ в пространстве находится по формуле $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$. В нашем случае

$$|AB| = \sqrt{(2-3)^2 + (-3-(-1))^2 + (-1-(-3))^2} = 3.$$

4. Даны точки $A(-3;1;2)$ и $B(1;-2;-4)$. Тогда координаты середины отрезка *AB* равны …

$(-1; -0{,}5; -1)$ - правильно

$(-2; -1; -2)$

$(-4; 3; 6)$

$(-4; -2; -4)$

Решение:

Воспользуемся формулой деления отрезка пополам. Координаты точки $M(x, y, z)$, делящей отрезок между точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ пополам, находятся по формулам $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2};\ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2};\ z = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$. Тогда $x = \dfrac{-3+1}{2} = -1,$

$y = \frac{1-2}{2} = -0{,}5, \; z = \frac{2-4}{2} = -1,$ то есть точка $M(x, y, z)$ имеет координаты $(-1; -0{,}5; -1)$.

5. Даны точки $A(-3; -1; 2)$ и $B(0; -2; -1)$. Тогда координаты точки $C(x; y)$, симметричной точке *B* относительно точки *A*, равны …

$(-6; 0; 5)$ - правильно

$(-3; -3; 1)$

$(-3; 1; 3)$

$(-6; -2; 4)$

Решение:

Воспользуемся формулой деления отрезка пополам. Координаты точки $M(x, y, z)$, делящей отрезок между точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ пополам, находятся по формулам $x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \; y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \; z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$ Тогда координаты точки $C(x; y; z)$ находятся как $-3 = \frac{x+0}{2}, \; -1 = \frac{y+(-2)}{2}, \; 2 = \frac{z+(-1)}{2},$ то есть точка $C(x; y; z)$ имеет координаты $(-6; 0; 5)$.

6. Расстояние между точками $A(1; -2; -3)$ и $B(k; 1; -9)$ равно 7 при положительном значении *k*, равном …

3

6

8

1

Решение:

Расстояние между двумя точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ находится по формуле $|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$. Тогда расстояние между точками A и B можно найти как

$|AB| = \sqrt{(k-1)^2 + (1-(-2))^2 + (-9-(-3))^2} = \sqrt{k^2 - 2k + 46}.$

Из условия $|AB| = 7$ получаем $\sqrt{k^2 - 2k + 46} = 7,$ то есть $k^2 - 2k + 46 = 49,$ или $k^2 - 2k - 3 = 0.$ Следовательно, положительное значение $k = 3.$

7. В треугольнике с вершинами $A(2; -1; 4), \; B(3; 2; -6)$ и $C(-5; 0; 2)$ проведена медиана *AM*, длина которой равна …

7

$\sqrt{6}$
$\sqrt{21}$
49
Решение:
Точка *M* является серединой отрезка *BC*. Координаты середины отрезка определяются по формулам $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$, $z = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$. Подставляя в эти формулы координаты точек $B(3;\,2;\,-6)$ и $C(-5;\,0;\,2)$, получим координаты точки *M*: $x = \dfrac{3-5}{2} = -1$, $y = \dfrac{2-0}{2} = 1$, $z = \dfrac{-6+2}{2} = -2$. Расстояние между точками *A* и *M* можно найти по формуле $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$, то есть $|AM| = \sqrt{(-1-2)^2 + (1-(-1))^2 + (-2-4)^2} = 7$.

Тема 16: Плоскость в пространстве,

1. Площадь треугольника, отсекаемого плоскостью $5x - 3y + z + 15 = 0$ от координатного угла Oxy, равна …
7,5
2,5
30
15

Плоскости $2x - 5y + z + 7 = 0$ и $mx + y - 3z + 1 = 0$ перпендикулярны при значении *m*, равном …
$m = 4$ - правильно
$m = 4{,}5$
$m = -6$
$m = 2$

2. Плоскости $2x - y + z - 3 = 0$ и $7x + y - 13z + 2 = 0$ …
перпендикулярны
параллельны
пересекаются под острым углом
совпадают
Решение:
Найдем угол между этими плоскостями. Угол, образованный двумя плоскостями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, определяется из соотношения $\cos\varphi = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$. Тогда $\cos\varphi = \dfrac{2\cdot 7 + (-1)\cdot 1 + 1\cdot(-13)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}\cdot\sqrt{7^2 + 1^2 + (-13)^2}} = 0$, или $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, то есть плоскости перпендикулярны.

3. Плоскость проходит через точку $A(6;-10;1)$ и отсекает на осях абсцисс и ординат в положительных направлениях отрезки длиной 3 и 5 соответственно. Тогда общее уравнение плоскости имеет вид …

$5x+3y+15z-15=0$ - правильно

$5x+3y+15z=0$

$5x+3y+15z+15=0$

$5x+3y+15z+1=0$

Решение:

Уравнение плоскости «в отрезках» имеет вид $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$ где a,b,c – длины отрезков, отсекаемых плоскостью на осях $Ox,\ Oy$ и Oz соответственно. Подставим в это уравнение значения $a=3,\ b=5$ и координаты точки $A(6;-10;1)$:

$$\frac{6}{3}+\frac{-10}{5}+\frac{1}{c}=1.$$

Тогда $c=1$ и общее уравнение плоскости примет вид $5x+3y+15z-15=0.$

4. Угол между плоскостями $x+2y-z+5=0$ и $2x+y+z-12=0$ равен …

$\frac{\pi}{3}$ - правильно

$\frac{5\pi}{6}$

$\frac{2\pi}{3}$

$\frac{\pi}{6}$

Решение:

Угол, образованный двумя плоскостями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$ определяется из соотношения

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Тогда

$$\cos\varphi=\frac{1\cdot2+2\cdot1+(-1)\cdot1}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{2},$$ или $$\varphi=\frac{\pi}{3}.$$

5. Общее уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2,-3,1)$ перпендикулярно прямой $\frac{x-3}{-4}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-5}{-2}$, имеет вид …

$4x-3y+2z-19=0$ - правильно

$2x-3y+z=0$

$4x-3y+2z-11=0$

$2x+3y-z+9=0$

Решение:

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M(x_0;y_0;z_0)$ с нормальным вектором $\bar{n}=(A,B,C)$ имеет вид $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$

Так как эта плоскость перпендикулярна прямой $\frac{x-3}{-4}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-5}{-2}$, то в качестве нормального вектора плоскости можно использовать направляющий вектор этой прямой, то есть $\bar{n}=(-4,3,-2)$ Тогда

$-4(x-2)+3(y+3)-2(z-1)=0$, или $4x-3y+2z-19=0.$

6. Даны три пары плоскостей:

1) $x-2y+8z-8=0$ и $x+z-6=0;$

2) $2x-y+3z-1=0$ и $4x-2y+6z+5=0;$

3) $x+6y+2z-11=0$ и $x+4y-5z+1=0.$

Тогда истинным является утверждение …

параллельна вторая пара плоскостей

параллельна первая пара плоскостей

параллельна третья пара плоскостей

среди заданных пар плоскостей параллельных пар нет

Решение:

Условие параллельности двух плоскостей, заданных уравнениями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, имеет вид $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$ Условию параллельности удовлетворяют плоскости

$2x-y+3z-1=0$ и $4x-2y+6z+5=0$, так как $\frac{2}{4}=\frac{-1}{-2}=\frac{3}{6}$, то есть параллельна вторая пара плоскостей.

Тема 17: Прямая линия в пространстве

1. В треугольнике с вершинами $A(5;-2;6)$, $B(0;-2;-4)$ и $C(-6;0;2)$ проведена медиана *AM*. Тогда уравнение медианы может иметь вид …

$\frac{x-5}{-8}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-6}{-7}$ - правильно

$\dfrac{x+3}{5}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z+1}{6}$

$\dfrac{x-3}{-5}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{-6}$

$\dfrac{x+5}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z+6}{5}$

2. Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-1;4;-3)$ перпендикулярно к плоскости $2x-3y+7z-4=0,$ имеет вид …

$\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-4}{-3}=\dfrac{z+3}{7}$ - правильно

$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+4}{-3}=\dfrac{z-3}{7}$

$\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+3}{4}=\dfrac{z-7}{-3}$

$\dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z+7}{-3}$

Решение:

Воспользуемся каноническим уравнением прямой, проходящей через точку $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ и направляющим вектором $\bar{s}(m;\, n;\, p)$: $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$.

В качестве направляющего вектора $\bar{s}$ можно взять нормальный вектор плоскости $2x-3y+7z-4=0:\ \bar{s}(2;\,-3;\,7)$. Получим $\dfrac{x-(-1)}{2}=\dfrac{y-4}{-3}=\dfrac{z-(-3)}{7}$, или $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-4}{-3}=\dfrac{z+3}{7}$.

3. Направляющий вектор прямой $\begin{cases} x-y+2z-10=0 \\ 3x+2y-z+6=0 \end{cases}$ имеет вид …

$(-3;\,7;\,5)$ - правильно

$(3;\,-2;\,-2)$

$(1;\,-1;\,2)$

$(3;\,-7;\,-1)$

Решение:

Направляющий вектор прямой, заданной пересечением двух плоскостей, можно найти как векторное произведение нормальных векторов этих плоскостей, то есть

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -3\bar{i}+7\bar{j}+5\bar{k}.$$

4. Каноническое уравнение прямой, проходящей через начало координат перпендикулярно прямым $l_1: \frac{x-3}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{1}$ и $l_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{3}$, имеет вид …

$\frac{x}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-3}$ - правильно

$\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$

$\frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{3}$

$\frac{x}{3} = \frac{y}{0} = \frac{z}{4}$

Решение:

Воспользуемся каноническим уравнением прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и направляющим вектором $\bar{s}(m; n; p)$: $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$. В качестве направляющего вектора $\bar{s}$ можно взять векторное произведение направляющих векторов прямых l_1 и l_2.

$$\bar{s}(m; n; p) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 4\bar{i} - \bar{j} - 3\bar{k}.$$

Тогда

Подставим координаты точки $M_0(0; 0; 0)$ и вектора $\bar{s}(4; -1; 3)$ в уравнение прямой:

$\frac{x-0}{4} = \frac{y-0}{-1} = \frac{z-0}{-3}$, или $\frac{x}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-3}$.

5. Острый угол между прямыми $l_1: \frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}}$ и $l_2: \frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{\sqrt{2}}$ равен …

$\frac{\pi}{3}$ - правильно

$\frac{2\pi}{3}$

$\frac{\pi}{4}$

$\frac{\pi}{6}$

Решение:

Угол между прямыми l_1 и l_2 определяется как угол между их направляющими векторами

$\bar{s}_1 = (a_1, b_1, c_1) = (1, -1, \sqrt{2})$ и $\bar{s}_2 = (a_2, b_2, c_2) = (1, 1, \sqrt{2})$, который можно вычислить по формуле

$$\cos\varphi = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Тогда $\cos\varphi = \dfrac{1\cdot 1 + (-1)\cdot 1 + \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (\sqrt{2})^2}\sqrt{1^2 + 1^2 + (\sqrt{2})^2}} = \dfrac{1}{2}$, то есть $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$.

6. Прямая $\dfrac{x-6}{-2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{0}$ параллельна плоскости $3x - ky + 2z - 7 = 0$, если параметр k равен …

– 6

– 1

6

1

Решение:

Прямая параллельна плоскости, если скалярное произведение направляющего вектора прямой $\bar{s} = (-2, 1, 0)$ и нормального вектора плоскости $\bar{n} = (3, -\mathrm{k}, 2)$ равно нулю, то есть векторы перпендикулярны. Тогда $(-2)\cdot 3 + 1\cdot(-k) + 0\cdot 2 = 0$, или $k = -6$.

7. Точка пересечения прямой $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+5}{0} = \dfrac{z}{-3}$ и плоскости $x - 4y - 3z + 1 = 0$ имеет координаты …

$(-3; -5; 6)$ - правильно

$(-1; 5; 0)$

$(1; -4; -3)$

$(2; 0; -3)$

Решение:

Запишем уравнение прямой в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = a_1t + x_0 \\ y = a_2t + y_0, \\ z = a_3t + z_0 \end{cases} \text{ то есть } \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -5 \\ z = -3t \end{cases}.$$

Подставим полученные уравнения в уравнение плоскости $x - 4y - 3z + 1 = 0$.

Тогда $2t + 1 - 4(-5) - 3\cdot(-3t) + 1 = 0$, или $t = -2$. Подставляя значение параметра $t = -2$ в систему параметрических уравнений $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -5 \\ z = -3t \end{cases}$, найдем координаты точки пересечения прямой и плоскости $(-3; -5; 6)$.

8. Угол α между прямой $\dfrac{x-6}{1}=\dfrac{y+5}{-1}=\dfrac{z-1}{0}$ и плоскостью $x-2y+z-7=0$ равен …

$\dfrac{\pi}{3}$ - правильно

$\dfrac{\pi}{6}$

$\dfrac{\pi}{4}$

$\dfrac{\pi}{2}$

Решение:

Синус угла между прямой $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ и плоскостью $Ax+By+Cz+D=0$ находится как

$$\sin\alpha=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=$$

$$=\frac{|1\cdot 1+(-2)\cdot(-1)+1\cdot 0|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Тогда острый угол между прямой и плоскостью $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$.

Тема 18: Поверхности второго порядка

1. Каноническое уравнение линии пересечения однополостного гиперболоида $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{6}=1$ и плоскости $x-2=0$ имеет вид …

$\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{6}=-1$ - правильно

$\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{6}=0$

$\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{6}=1$

$\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{6}=1$

Решение:

Уравнение кривой пересечения однополостного гиперболоида и плоскости получим,

решив систему $\begin{cases} \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{6}=1, \\ x-2=0 \end{cases}$ то есть $\dfrac{2^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{6}=1,$ или $\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{6}=-1.$
Полученное уравнение есть каноническое уравнение гиперболы.

2. Даны уравнения поверхностей второго порядка:

A) $\dfrac{(x-1)^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{(z+2)^2}{9}=0;$

B) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{(y-2)^2}{1}-\dfrac{(z+1)^2}{16}=-1;$

C) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{(y-1)^2}{16}+\dfrac{z^2}{1}=1;$

D) $\dfrac{(x-4)^2}{16}+\dfrac{(y+1)^2}{9}-\dfrac{z^2}{1}=1.$

Тогда эллипсоид задается уравнением …

C

B

A

D

3. Уравнение поверхности второго порядка $3x^2+2y^2+6z^2+6x-24z+21=0$ определяет …

эллипсоид

параболоид

конус

однополостный гиперболоид

Решение:

Выделим в уравнении $3x^2+2y^2+6z^2+6x-24z+21=0$ полные квадраты:

$3\left(x^2+2x+1\right)-3+2y^2+6\left(z^2-4z+4\right)-24+21=0,$ или

$3(x+1)^2+2y^2+6(z-2)^2=6.$

Разделив обе части последнего уравнения на 6, получим уравнение

$\dfrac{(x+1)^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}+\dfrac{(z-2)^2}{1}=1,$ которое определяет эллипсоид.

4. Центр поверхности $9x^2+4y^2+36z^2-18x-16y-11=0$ …

лежит в плоскости Oxy

лежит в плоскости Oxz

лежит в плоскости Oyz

не лежит ни в одной из координатных плоскостей
Решение:
Преобразуем данное уравнение поверхности. Для этого дополним до полных квадратов члены, содержащие $x, y,$ то есть перепишем уравнение в виде
$9((x^2-2x+1)-1)+4((y^2-4y+4)-4)+36z^2-11=0.$
Тогда $9(x-1)^2-9+4(y-2)^2-16+36z^2-11=0,$
или $9(x-1)^2+4(y-2)^2+36z^2=36.$
Разделив обе части последнего уравнения на 36, получаем уравнение
$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{9}+\frac{z^2}{1}=1,$ которое определяет эллипсоид с центром в точке с координатами $(1;2;0),$ то есть центр поверхности лежит в плоскости $Oxy.$

5. Линия пересечения поверхности $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{6}=2z$ и плоскости xOz представляет собой …
параболу
эллипс
гиперболу
окружность
Решение:
Уравнение плоскости xOz имеет вид $y=0.$ Тогда уравнение линии пересечения поверхности $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{6}=2z$ и плоскости xOz получим из решения системы
$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{6}=2z, \\ y=0\end{cases}$ то есть $x^2=8z$ – уравнение параболы.

6. Вершина параболоида $x^2+3y^2-6x-z=0$ имеет координаты …
$(3;0;-9)$ - правильно
$(1;3;-6)$
$(3;1;3)$
$(-3;0;9)$
Решение:
Выделим в данном уравнении полный квадрат по переменной x:
$(x^2-6x+9)-9+3y^2-z=0,$ или $(x-3)^2+3y^2=z+9.$
Разделим обе части данного уравнения на 3: $\frac{(x-3)^2}{3}+\frac{y^2}{1}=\frac{z+9}{3}.$ Тогда вершина параболоида имеет координаты $(3;0;-9)$

7. Уравнение сферы имеет вид
$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 10z - 19 = 0.$
Тогда радиус сферы равен …
7
19
10
49
Решение:
Уравнение сферы радиуса R с центром в точке $M(x_0; y_0; z_0)$ имеет вид
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$
Выделим в исходном уравнении $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 10z - 19 = 0$ полные квадраты:
$(x^2 - 4x + 4) - 4 + (y^2 + 2y + 1) - 1 + (z^2 - 10z + 25) - 25 - 19 = 0,$
то есть $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 5)^2 = 49.$
Тогда радиус сферы равен 7.

8. Центр однополостного гиперболоида $5x^2 + 10y^2 - 4z^2 + 10x - 80y - 24z + 109 = 0$ имеет координаты …
$(-1; 4; -3)$ - правильно
$(5; 10; -4)$
$(4; 2; 5)$
$(1; -4; 3)$
Решение:
Уравнение однополостного гиперболоида с центром в точке $(x_0; y_0; z_0)$ имеет вид
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1.$$
Выделим в исходном уравнении полные квадраты:
$5(x^2 + 2x + 1) - 5 + 10(y^2 - 8y + 16) - 160 - 4(z^2 + 6z + 9) + 36 + 109 = 0,$ или
$5(x + 1)^2 + 10(y - 4)^2 - 4(z + 3)^2 = 20,$ то есть $\frac{(x + 1)^2}{4} + \frac{(y - 4)^2}{2} - \frac{(z + 3)^2}{5} = 1.$
Тогда центр гиперболоида имеет координаты $(-1; 4; -3).$

Тема 19: Определение линейного пространства
1. Среди представленных множеств линейное пространство **не образует** множество …
всех матриц размерностью *m*□*n*, содержащих только положительные числа
всех векторов, принадлежащих пространству R^3
всех матриц размерностью *m*□*n*

всех векторов, принадлежащих пространству R^2

Решение:

Множество L образует линейное пространство, если для любых 2-х его элементов x, y определены операции сложения $x + y \in L$ и умножения на действительное число $\lambda \in R;\ \lambda x \in L$ со свойствами:

1. $x + y = y + x;$
2. $(x + y) + z = x + (y + z);$
3. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y;$
4. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x;$
5. $0 \cdot x = \overline{0},\ \lambda \cdot \overline{0} = \overline{0};$
6. $\exists - x : x + (-x) = 0.$

При проверке аксиом получим, что множество всех матриц размерностью $m\square n$, содержащих только положительные числа, не образуют линейного пространства, так как при умножении на отрицательное число получаем матрицу с отрицательными числами и не выполняется шестая аксиома.

2. На линейном пространстве L задана операция …

$x + y \in L$ **для любых** $x, y \in L$ **- правильно**

$x \times y \in L$ для любых $x, y \in L$

$\frac{x}{y} \in L$ для любых $x, y \in L$

$x^y \in L$ для любых $x, y \in L$

3. Для элементов линейного пространства операции сложения и умножения на действительное число обладают свойством …

$\lambda \cdot \overline{0} = \overline{0}$ - правильно

$x \cdot y = y \cdot x$

$0 \cdot x = x$

$-x = x$

Решение:

Множество L образует линейное пространство, если для любых двух его элементов x, y определены операции сложения $x + y \in L$ и умножения на действительное число $\lambda \in R;\ \lambda x \in L$ со свойствами:

1. $x + y = y + x;$
2. $(x + y) + z = x + (y + z);$
3. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y;$
4. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x;$

5. $0 \cdot x = \overline{0},\ \lambda \cdot \overline{0} = \overline{0};$

6. $\exists -x : x + (-x) = 0.$

4. Линейное пространство *L* **не обладает** свойством …

для любого $x \in L$ может существовать несколько противоположных элементов $-x \in L$ - правильно

$0 \cdot x = \overline{0}$ для любого $x \in L$

$(-1)\,x = -x$ для любого $x \in L$

нейтральный элемент $\overline{0} \in L$ является единственным

Решение:

Линейное пространство обладает следующими свойствами:

1) Нейтральный элемент $\overline{0} \in L$ является единственным;

2) $0 \cdot x = \overline{0}$ для любого $x \in L;$

3) Для любого $x \in L$ противоположный элемент $-x \in L$ является единственным;

4) $(-1)\,x = -x$ для любого $x \in L;$

5) $(-\lambda)\,x = \lambda(-x) = -(\lambda x)$ для любых $\lambda \in R$ и $x \in L.$

5. Свойством линейного пространства *L* является …

$x + y = y + x;\ x, y \in L,\ \lambda \in R$ - правильно

$x \cdot y = y \cdot x;\ x, y \in L$

$(\lambda \cdot x) \cdot y = (\lambda \cdot y) \cdot x;\ x, y \in L,\ \lambda \in R$

$y - x = x - y;\ x, y \in L$

6. Для элементов линейного пространства операции сложения и умножения на действительное число обладают свойством …

$0 \cdot x = \overline{0}$ - правильно

$x \cdot y = y \cdot x$

$\lambda \cdot \overline{0} = \lambda$

$\lambda(x + y) = \lambda x + y$

Решение:

Множество L образует линейное пространство, если для любых двух его элементов x, y определены операции сложения $x + y \in L$ и умножения на действительное число $\lambda \in R;\ \lambda x \in L$ со свойствами:

1. $x + y = y + x;$

2. $(x + y) + z = x + (y + z);$

3. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y;$

4. $\lambda(\mu x) = (\lambda \mu) x;$

5. $0 \cdot x = \overline{0},\ \lambda \cdot \overline{0} = \overline{0};$

6. $\exists - x : x + (-x) = 0.$

7. Элементы линейного пространства $L,$ удовлетворяющие свойству $x + (-x) = 0,$ называются …

противоположными

нейтральными

обратными

ортогональными

Решение:

Линейное пространство обладает свойством: для любого $x \in L$ противоположный элемент $-x \in L$ является единственным.

Тема 20: Базис и размерность линейного пространства

1. Совокупность векторов $\overline{a} = (3;2;3),\ \overline{b} = (1;4;\lambda),\ \overline{c} = (5;\lambda;5)$ **не может являться** базисом трехмерного линейного пространства, если λ равно …

1

4

2

3

Решение:

Совокупность линейно независимых векторов называется базисом линейного этого пространства. Значит, совокупность трех векторов не является базисом, если векторы линейно зависимы, то есть определитель, составленный из координат этих векторов, равен нулю. Тогда

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & \lambda \\ 3 & \lambda & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & \lambda \\ \lambda & 5 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & \lambda \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & \lambda \end{vmatrix} = 3 \cdot (4 \cdot 5 - \lambda \cdot \lambda) - 1 \cdot (2 \cdot 5 - \lambda \cdot 3) +$$

$$+ 5 \cdot (2 \cdot \lambda - 4 \cdot 3) = 2 \cdot (20 - \lambda^2) - 1 \cdot (10 - 3\lambda) + 5 \cdot (2\lambda - 12) = 40 - 2\lambda^2 - 10 +$$

$$+ 3\lambda + 10\lambda - 60 = -3\lambda^2 + 13\lambda - 10 \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq 1;\ 2\frac{1}{3}.$$

2. За базис трехмерного векторного пространства можно принять совокупность векторов …

$(1;2;3), (1;3;2), (1;1;1)$ - правильно

$(1;2;3), (1;3;2), (2;4;6)$

$(1;2;3), (1;3;2), (2;6;4)$

$(1;2;3), (3;6;9), (1;1;1)$

Решение:

Если в линейном пространстве есть n линейно независимых векторов, а любые $n+1$ векторы линейно зависимы, то пространство называется n-мерным, а совокупность линейно независимых векторов называется базисом линейного этого пространства. Значит, совокупность трех векторов должна быть линейно независимой, то есть определитель, составленный из координат этих векторов, не равен нулю. Тогда

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix} = 1\cdot(3\cdot 1 - 1\cdot 2) - 1\cdot(2\cdot 1 - 1\cdot 3) +$$

$+1\cdot(2\cdot 2 - 3\cdot 3) = 1 - 1\cdot(-1) + (4-9) = 1 + 1 - 5 = -3 \neq 0$. Следовательно, совокупность векторов $(1;2;3), (1;3;2), (1;1;1)$ можно принять за базис трехмерного пространства. Остальные совокупности векторов нельзя принять за базис трехмерного пространства, так как определители, составленные из координат этих векторов, равны нулю, то есть эти векторы линейно зависимы.

3. Вектор $\bar{c} = \lambda\bar{a} - \bar{b}$ является линейной комбинацией векторов $\bar{a} = (6;5)$ и $\bar{b} = (3;3)$. Если $\bar{c} = (9;7)$, то λ равно …

2

3

– 2

– 3

Решение:

$\bar{c} = \lambda\bar{a} - \bar{b} = \lambda(6;5) - (3;3) = (6\lambda - 3; 5\lambda - 3) \Rightarrow$

$(9;7) = (6\lambda - 3; 5\lambda - 3) \Rightarrow 6\lambda - 3 = 9;\ 5\lambda - 3 = 7 \Rightarrow \lambda = 2.$

4. Разложение вектора $\bar{d} = (4;5;6)$ по векторам $\bar{a} = (1;2;0)$, $\bar{b} = (0;3;0)$ и $\bar{c} = (2;0;2)$ имеет вид …

$-2\bar{a} + 3\bar{b} + 3\bar{c}$ - правильно

$2\bar{a} + 3\bar{b} + 3\bar{c}$

$10\bar{a} - 5\bar{b} + 3\bar{c}$

$2\bar{a} + 3\bar{b} - 3\bar{c}$

Решение:

Разложение вектора $\bar{d} = (4;5;6)$ по векторам $\bar{a} = (1;2;0)$, $\bar{b} = (0;3;0)$ и $\bar{c} = (2;0;2)$ имеет вид $\bar{d} = \lambda_1\bar{a} + \lambda_2\bar{b} + \lambda_3\bar{c}$. Представим это равенство в виде системы из трех уравнений с тремя неизвестными: $\begin{cases}\lambda_1 + 2\lambda_3 = 4,\\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 5,\\ 2\lambda_3 = 6,\end{cases}$ то есть $\begin{cases}\lambda_1 = -2,\\ \lambda_2 = 3,\\ \lambda_3 = 3.\end{cases}$

5. Вектор $\bar{c} = (5;4;-1)$ является линейной комбинацией векторов $\bar{a} = (1;1;1)$ и $\bar{b} = (2;1;-4)$. Если $\bar{c} = \lambda\bar{a} + \bar{b}$, то λ равно …

3

2
– 2
– 3
Решение:
$\bar{c} = \lambda\bar{a} + \bar{b} = \lambda(1;1;1) + (2;1;-4) = (\lambda+2;\lambda+1;\lambda-4) \Rightarrow$
$(5;4;-1) = (\lambda+2;\lambda+1;\lambda-4) \Rightarrow \lambda+2=5;\ \lambda+1=4;\ \lambda-4=-1 \Rightarrow \lambda=3.$

6. Совокупность векторов $\bar{a} = (2;1;2),\ \bar{b} = (\lambda;1;\lambda),\ \bar{c} = (3;5;4)$ **не может являться** базисом трехмерного линейного пространства, если λ равно …
2
4
1
3
Решение:
Совокупность линейно независимых векторов называется базисом линейного этого пространства. Значит, совокупность 3 векторов не является базисом, если векторы линейно зависимы, то есть определитель, составленный из координат этих векторов, равен нулю. Тогда

$$\begin{vmatrix} 2 & \lambda & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & \lambda & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ \lambda & 4 \end{vmatrix} - \lambda\cdot\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = 2\cdot(1\cdot4-5\cdot\lambda) - \lambda\cdot(1\cdot4-5\cdot2) +$$
$$+3\cdot(1\cdot\lambda-1\cdot2) = 2\cdot(4-5\lambda) - \lambda\cdot(4-10) + 3\cdot(\lambda-2) = 8-10\lambda+6\lambda+$$
$$+3\lambda-6 = 2-\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 2.$$

Тема 21: Линейные отображения

1. Прообразом вектора $\bar{Y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ при линейном преобразовании, заданном матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, является вектор …

$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ - правильно

$\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 11 \\ 19 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 8 \\ 21 \end{pmatrix}$

Решение:

Так как $\bar{Y} = A\cdot\bar{X}$, то $\bar{X} = A^{-1}\cdot\bar{Y} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

2. Образом вектора $\overline{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ при линейном преобразовании, заданном матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, является вектор …

$\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ - правильно

$\begin{pmatrix} 13 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix}$

3. Дано линейное преобразование векторов на плоскости *Oxy*, которое каждый вектор переводит в сонаправленный вектор, в два раза длиннее исходного. Тогда матрица *A* этого преобразования имеет вид …

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ - правильно

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

2

Решение:

Так как $\overline{e}_1 \to 2 \cdot \overline{e}_1 + 0 \cdot \overline{e}_2$ и $\overline{e}_2 \to 0 \cdot \overline{e}_1 + 2 \cdot \overline{e}_2$, то матрица такого линейного преобразования имеет вид $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Прообразом вектора $\overline{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ при линейном преобразовании, заданном матрицей $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, является вектор …

$\begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix}$ - правильно

$\begin{pmatrix} 13 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -5 \\ -12 \end{pmatrix}$

Решение:

Так как $\overline{Y} = A \cdot \overline{X}$, то $\overline{X} = A^{-1} \cdot \overline{Y} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix}$.

5. Образом вектора $\overline{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ при линейном преобразовании, заданном матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, является вектор …

$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ - правильно

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

Решение:

Так как образ $\overline{Y}$ вектора $\overline{X}$ определяется по формуле $\overline{Y} = A \cdot \overline{X}$, то

$\overline{Y} = A \cdot \overline{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

6. Дано линейное преобразование векторов на плоскости *Oxy*, которое каждый вектор переводит в вектор той же длины, но противоположно направленный исходному. Тогда матрица *A* этого преобразования имеет вид …

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ - правильно

-1

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Решение:

Так как $\bar{e}_1 \to -\bar{e}_1 + 0 \cdot \bar{e}_2$ и $\bar{e}_2 \to 0 \cdot \bar{e}_1 - \bar{e}_2$, то матрица такого линейного преобразования имеет вид $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

7. Дано линейное преобразование векторов на плоскости *Oxy*, которое каждый вектор поворачивает на угол 90^0 по часовой стрелке по отношению к исходному. Тогда матрица *A* этого преобразования имеет вид …

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ - правильно

–1

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Решение:

Так как $\bar{e}_1 \to 0 \cdot \bar{e}_1 - \bar{e}_2$ и $\bar{e}_2 \to \bar{e}_1 + 0 \cdot \bar{e}_2$, то матрица такого линейного преобразования имеет вид $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

8. Дано линейное преобразование векторов на плоскости *Oxy*, которое каждый вектор поворачивает на угол 270^0 по часовой стрелке по отношению к исходному и длина которого в 4 раза больше исходного. Тогда матрица *A* этого преобразования имеет вид …

$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ - правильно

$\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

4

Тема 22: Линейные операторы

1. Пусть $E = (\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ – базис пространства R^2. Операторы *f* и *g* этого пространства заданы матрицами $M_E(f) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $M_E(g) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Тогда матрица оператора $g - f$ равна …

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ - правильно

$\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$

Решение:

$$M_E(g-f) = M_E(g) - M_E(f) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

2. Пусть $E = (\overline{e}_1, \overline{e}_2)$ – базис пространства R^2. Операторы f и g этого пространства заданы матрицами $M_E(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$; $M_E(g) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда матрица оператора $2f + f \cdot g$ равна …

$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ - правильно

$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Решение:

$$M_E(2f + f \cdot g) = 2M_E(f) + M_E(f) \cdot M_E(g) =$$

$$= 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Линейный оператор f отображает базис $E = (\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$ в векторы $f(\overline{e}_1) = \overline{e}_1 - 2\overline{e}_2$; $f(\overline{e}_2) = 3\overline{e}_1 + \overline{e}_2 - \overline{e}_3$; $f(\overline{e}_3) = 3\overline{e}_2 + 2\overline{e}_3$. Тогда матрица оператора f в этом базисе имеет вид …

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ - правильно

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$\begin{pmatrix} \bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 \\ 3\bar{e}_1 + \bar{e}_2 - \bar{e}_3 \\ 3\bar{e}_2 + 2\bar{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Пусть $E = (\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ – базис пространства R^2. Операторы *f* и *g* этого пространства заданы матрицами $M_E(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $M_E(g) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Тогда матрица оператора $f - g$ равна …

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ - правильно

$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$

Решение:

$$M_E(f-g) = M_E(f) - M_E(g) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

5. Из заданных операторов пространства R^2 – пространства двумерных векторов, линейным является оператор …

$\varphi(\bar{x}) = (x_2 - x_1;\ x_1 + x_2)$ - правильно

$\varphi(\bar{x}) = (x_2 - 3;\ x_1 + 3)$

$\varphi(\bar{x}) = (x_2;\ x_1 x_2)$

$\varphi(\bar{x}) = (x_2;\ 1)$

Решение:

Линейным называется отображение φ удовлетворяющее условиям

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y),$$

$$\varphi(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot \varphi(x).$$

Проверим на линейность оператор $\varphi(\bar{x}) = (x_2 - 3;\ x_1 + 3)$:

$$\varphi(\bar{x} + \bar{y}) = (x_2 + y_2 - 3;\ x_1 + y_1 + 3),$$

$$\varphi(\bar{x}) + \varphi(\bar{y}) = (x_2 + y_2 - 6;\ x_1 + y_1 + 6).$$

Следовательно $\varphi(\bar{x} + \bar{y}) \neq \varphi(\bar{x}) + \varphi(\bar{y})$ – первое условие не выполнено, а значит,

$\varphi(\bar{x}) = (x_2 - 3;\ x_1 + 3)$ не является линейным оператором.

Для оператора $\varphi(\bar{x}) = (x_2;\ x_1x_2)$ проверим выполнение второго условия:

$\varphi(\lambda \cdot \bar{x}) = (\lambda x_2;\ \lambda x_1 \cdot \lambda x_2) = \lambda \cdot (x_2;\ \lambda \cdot x_1x_2) \neq \lambda \cdot \varphi(\bar{x})$.

Условие не выполняется, значит, $\varphi(\bar{x}) = (x_2;\ x_1x_2)$ не линейный оператор.

Проверим выполнение второго условия для оператора $\varphi(\bar{x}) = (x_2;\ 1)$:

$\varphi(\lambda \cdot \bar{x}) = (\lambda \cdot x_2; 1) \neq \lambda \cdot \varphi(\bar{x}) = (\lambda \cdot x_2;\ \lambda \cdot 1)$.

Следовательно, данный оператор не является линейным.

Проверим выполнение условий линейности для оператора $\varphi(\bar{x}) = (x_2 - x_1;\ x_1 + x_2)$:

$\varphi(\bar{x} + \bar{y}) = (x_2 + y_2 - x_1 - y_1;\ x_1 + y_1 + x_2 + y_2)$,

$\varphi(\bar{x}) + \varphi(\bar{y}) = (x_2 - x_1 + y_2 - y_1;\ x_1 + x_2 + y_1 + y_2)$.

Следовательно $\varphi(\bar{x} + \bar{y}) = \varphi(\bar{x}) + \varphi(\bar{y})$ – первое условие выполнено;

$\varphi(\lambda \cdot \bar{x}) = (\lambda \cdot x_2 - \lambda \cdot x_1;\ \lambda \cdot x_1 + \lambda \cdot x_2) = \lambda \cdot \varphi(\bar{x})$ – второе условие выполнено,

поэтому $\varphi(\bar{x}) = (x_2 - x_1;\ x_1 + x_2)$ является линейным оператором.

6. Пусть в пространстве R^3 линейный оператор $\tilde{A}$ в базисе $E = (\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3})$ задан матрицей $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда образ $\bar{y} = \tilde{A}(\bar{x})$ вектора $\bar{x} = 2\overline{e_1} - \overline{e_2} + 3\overline{e_3}$ имеет вид …

$\bar{y} = -\overline{e_1} + 5\overline{e_2} - \overline{e_3}$ - правильно

$\bar{y} = 3\overline{e_1} + 28\overline{e_2} + 4\overline{e_3}$

$\bar{y} = \overline{e_1} - 5\overline{e_2} + \overline{e_3}$

$\bar{y} = -3\overline{e_1} + 28\overline{e_2} - 4\overline{e_3}$

Решение:

Заданием матрицы оператор определяется однозначно. Если $\bar{y} = \tilde{A}(\bar{x})$, то матричная запись для данного оператора имеет вид $Y = AX$.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда, $\bar{y} = -\overline{e_1} + 5\overline{e_2} - \overline{e_3}$.

7. Пусть $E = (\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ – базис пространства R^2. Операторы f и g этого пространства заданы матрицами $M_E(f) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; $M_E(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. Тогда матрица оператора $2g - 3f$ равна …

$\begin{pmatrix} 9 & -1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}$ - правильно

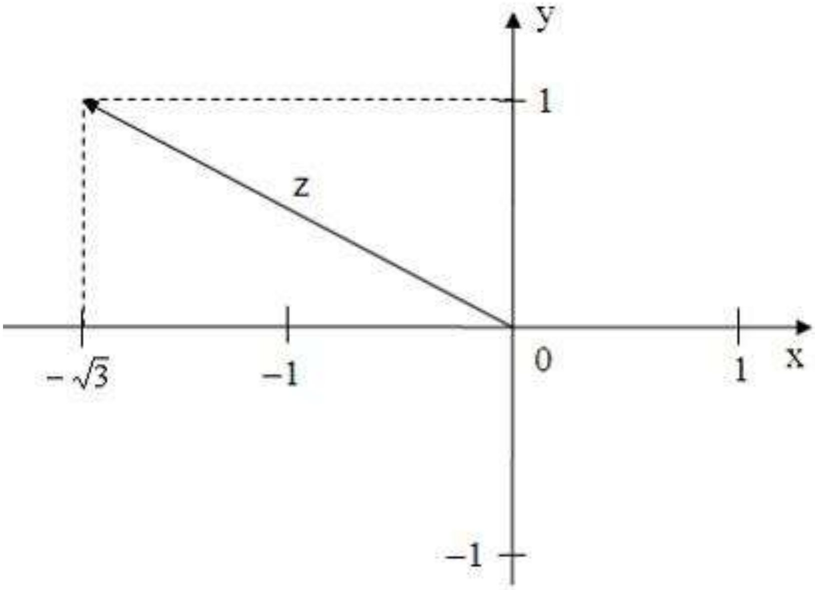
$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

Тема 23: Комплексные числа и их представление

1. Изображение комплексного числа z на комплексной плоскости представлено на рисунке.



Тогда алгебраическая форма записи сопряженного ему числа $\bar{z}$ имеет вид …

$-\sqrt{3}-i$ - правильно

$-\sqrt{3}+i$

$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-i\cdot\dfrac{1}{2}$

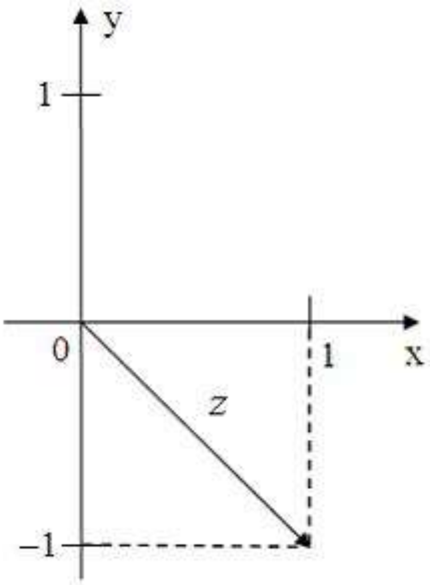
$2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}-i\cdot\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$

Решение:

Алгебраическая форма комплексного числа имеет вид $z=\alpha+\beta\cdot i$, где α – действительная часть, а β – мнимая часть комплексного числа. Так как $\alpha=-\sqrt{3}$, а $\beta=1$, то $z=-\sqrt{3}+i$.

Если $z=\alpha+\beta\cdot i$, то $\bar{z}=\alpha-\beta\cdot i$. В нашем случае $\bar{z}=-\sqrt{3}-i$.

2. Изображение комплексного числа z на комплексной плоскости представлено на рисунке.



Тогда его алгебраическая форма записи имеет вид …

$1 - i$ - правильно

$1 + i$

$\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

Решение:

Алгебраическая форма комплексного числа имеет вид $z = \alpha + \beta \cdot i,$ где α – действительная часть, а β – мнимая часть комплексного числа. Так как $\alpha = 1,$ а $\beta = -1,$ то $z = 1 - i.$

3. Комплексное число задано в алгебраической форме $z = 2\sqrt{3} + 2 \cdot i.$ Тогда тригонометрическая форма записи сопряженного к нему числа $\bar{z}$ имеет вид …

$4 \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{6} \right) \right)$ - правильно

$4 \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{3} \right) \right)$

$4 \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6} \right) - i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{6} \right) \right)$

$\cos\left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{6} \right)$

Решение:

Если $z = \alpha + \beta \cdot i,$ то $\bar{z} = \alpha - \beta \cdot i.$ В нашем случае $\bar{z} = 2\sqrt{3} - 2 \cdot i.$ Комплексное число $z = \alpha + \beta \cdot i$ в тригонометрической форме записи имеет вид

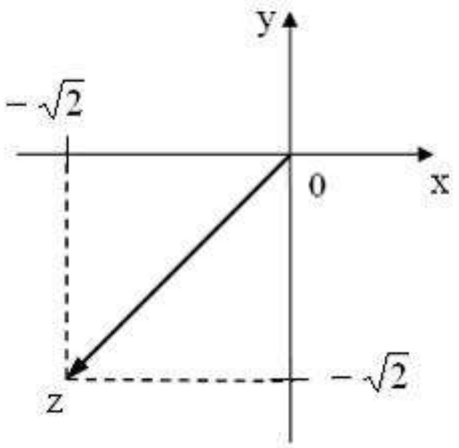
$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$, где $|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, а аргумент φ определяется из системы уравнений $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \end{cases}$.

В нашем случае $\alpha = 2\sqrt{3}$ и $\beta = -2$. Следовательно, $|z| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = \sqrt{16} = 4$,

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\varphi = \dfrac{-2}{\sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2}} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

и главное значение аргумента $\varphi = -\dfrac{\pi}{6}$. Тогда тригонометрическая форма данного комплексного числа имеет вид $z = 4 \cdot \left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$.

4. Изображение комплексного числа z на комплексной плоскости представлено на рисунке.



Тогда тригонометрическая форма записи сопряженного к нему числа $\bar{z}$ имеет вид …

$2 \cdot \left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i \cdot \sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$ - правильно

$2 \cdot \left(\cos\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)\right)$

$\sqrt{2} \cdot \left(\cos\dfrac{3\pi}{4} - i \cdot \sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$

$$\sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Решение:

Тригонометрическая форма комплексного числа имеет вид $z=|z|\cdot(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)$

Так как $|z|=\sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2}=2,$

а главное значение аргумента $\varphi=-\frac{3\pi}{4},$ то $z=2\cdot\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right).$ Если $z=|z|\cdot(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi),$ то $\bar{z}=|z|\cdot(\cos\varphi-i\cdot\sin\varphi).$ В нашем случае

$$\bar{z}=2\cdot\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)-i\cdot\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)=2\cdot\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

5. Комплексное число задано в тригонометрической форме $z=3\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{5\pi}{6}\right).$ Тогда алгебраическая форма записи сопряженного к нему числа $\bar{z}$ имеет вид …

$-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}\cdot i$ - правильно

$-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}\cdot i$

$-\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot i$

$\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}\cdot i$

6. Комплексное число задано в алгебраической форме $z=-2-2\sqrt{3}\cdot i.$ Тогда тригонометрическая форма записи сопряженного к нему числа $\bar{z}$ имеет вид …

$4\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ - правильно

$4\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

Решение:

Если $z=\alpha+\beta\cdot i,$ то $\bar{z}=\alpha-\beta\cdot i.$ В нашем случае $\bar{z}=-2+2\sqrt{3}\cdot i.$ Комплексное число $z=\alpha+\beta\cdot i$ в тригонометрической форме записи имеет вид

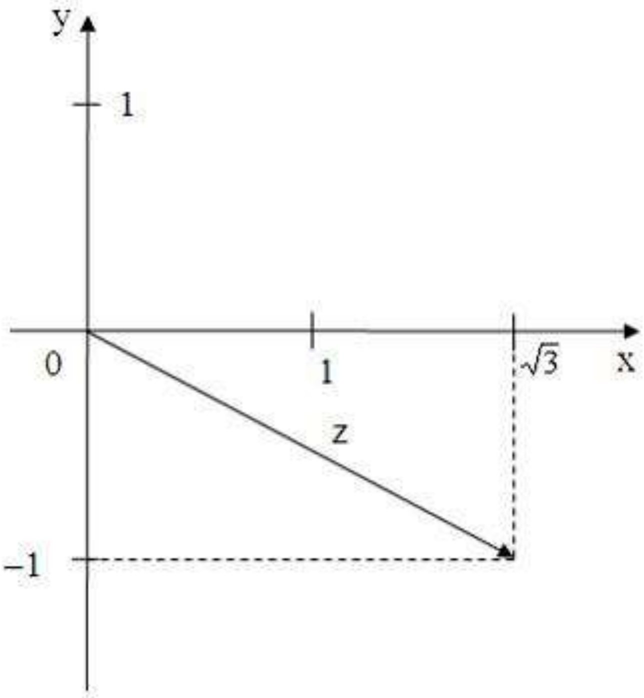
$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$, где $|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, а аргумент φ определяется из системы уравнений $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}. \end{cases}$

В нашем случае $\alpha = -2$ и $\beta = 2\sqrt{3}$. Следовательно, $|z| = \sqrt{(-2)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{16} = 4$,

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{-2}{\sqrt{(-2)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2}} = -\dfrac{1}{2}, \\ \sin\varphi = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{(-2)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

и главное значение аргумента $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$. Тогда тригонометрическая форма данного комплексного числа имеет вид $z = 4 \cdot \left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i \cdot \sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

7. Изображение комплексного числа z на комплексной плоскости представлено на рисунке.



Тогда его тригонометрическая форма записи имеет вид …

$2 \cdot \left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$ - правильно

$2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$2\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$\sqrt{3}\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

Решение:

Тригонометрическая форма комплексного числа имеет вид $z=|z|\cdot(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)$. Так как $|z|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2,$

а главное значение аргумента $\varphi=-\frac{\pi}{6},$ то $z=2\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right).$

Тема 24: Операции над комплексными числами, заданными в алгебраической форме

1. Произведение комплексных чисел $z_1=1-2\cdot i$ и $z_2=3+5\cdot i$ равно …

$13-i$ - правильно

$4+3\cdot i$

$-2-7\cdot i$

$13+i$

Решение:

Произведение двух комплексных чисел находится по формуле

$z_1\cdot z_2=(\alpha_1+\beta_1\cdot i)\cdot(\alpha_2+\beta_2\cdot i)=(\alpha_1\cdot\alpha_2-\beta_1\cdot\beta_2)+(\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2)\cdot i.$ В нашем случае получим $z_1\cdot z_2=(1-2\cdot i)\cdot(3+5\cdot i)=(3+10)+(5-6)\cdot i=13-i.$

2. Частное $\frac{z_1}{z_2}$ комплексных чисел $z_1=1-i$ и $z_2=1+i$ равно …

$-i$ - правильно

i

$1-i$

$2+i$

Решение:

Частное от деления двух комплексных чисел находится по формуле

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\alpha_1+\beta_1\cdot i}{\alpha_2+\beta_2\cdot i}=\frac{\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2}{\alpha_2^2+\beta_2^2}+\frac{\beta_1\alpha_2-\alpha_1\beta_2}{\alpha_2^2+\beta_2^2}\cdot i.$$

В нашем случае получим $\frac{z_1}{z_2}=\frac{1-i}{1+i}=\frac{1\cdot 1+(-1)\cdot 1}{1^2+1^2}+\frac{(-1)\cdot 1-1\cdot 1}{1^2+1^2}\cdot i=-i.$

3. Если $z=1-i$, то значение выражения $\frac{2\cdot z+1}{z^2}$ равно …

$1+\frac{3}{2}\cdot i$ - правильно

$2+2\cdot i$

$1-\frac{3}{2}\cdot i$

$-1+\frac{3}{2}\cdot i$

4. Если $z=-1+4\cdot i,$ то значение выражения $z^2+2\cdot z+1$ равно …

-16 - правильно

$16\cdot i$

16

$8-2\cdot i$

Решение:

Так как $z^2+2\cdot z+1=(z+1)^2,$ то получим

$z^2+2\cdot z+1=(-1+4\cdot i+1)=(4\cdot i)^2=16\cdot i^2=-16.$

5. Если $z=2+i$, то произведение $z\cdot\bar{z},$ где $\bar{z}$ – число, сопряженное числу $z,$ равно …

5

3

$5-4\cdot i$

$4-i$

Решение:

Если $z=\alpha+\beta\cdot i,$ то $\bar{z}=\alpha-\beta\cdot i.$ В нашем случае $\bar{z}=2-i.$ Тогда

$z\cdot\bar{z}=(2+i)\cdot(2-i)=4-i^2=4+1=5.$

6. Если $z=1-2\cdot i,$ то $(\bar{z})^2,$ где $\bar{z}$ – число, сопряженное числу $z,$ равно …

$-3+4\cdot i$ - правильно

$5+4\cdot i$

$-3-4\cdot i$

$5-4\cdot i$

Решение:

Если $z=\alpha+\beta\cdot i,$ то $\bar{z}=\alpha-\beta\cdot i.$ В нашем случае $\bar{z}=1+2\cdot i.$ Тогда

$(\bar{z})^2=(1+2\cdot i)^2=1+4\cdot i+4\cdot i^2=1+4\cdot i-4=-3+4\cdot i.$

Тема 25: Операции над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме

1. Даны два комплексных числа $z_1 = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{\pi}{3} \right)$ и $z_2 = \cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{\pi}{6}$.

Тогда частное от деления $\frac{z_1}{\bar{z}_2}$, где $\bar{z}_2$ – число, сопряженное числу z_2, будет равно …

$2 \cdot i$ - правильно

2

$-2 \cdot i$

$\sqrt{3} + i$

Решение:

Если $z = \alpha + \beta \cdot i,$ то $\bar{z} = \alpha - \beta \cdot i.$ В нашем случае

$$\bar{z}_2 = \cos\frac{\pi}{6} - i \cdot \sin\frac{\pi}{6} = \cos\left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{6} \right).$$

Частное от деления двух комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, находится по формуле

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \right].$$

В нашем случае получим

$$\frac{z_1}{\bar{z}_2} = \frac{2}{1} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) \right] = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \sin\frac{\pi}{2} \right) = 2 \cdot i.$$

2. Дано комплексное число $z = 3 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{5} + i \cdot \sin\frac{2\pi}{5} \right).$ Тогда z^5 равно …

243

$243 \cdot i$

-243

$-243 \cdot i$

Решение:

Если комплексное число z в тригонометрической форме имеет вид $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi),$ то по формуле Муавра $z^n = |z|^n \cdot (\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi),$ где n – натуральное число.

В нашем случае

$$z^5 = (3)^5 \cdot \left(\cos\left(5 \cdot \frac{2\pi}{5} \right) + i \cdot \sin\left(5 \cdot \frac{2\pi}{5} \right) \right) = 243 \cdot (\cos 2\pi + i \cdot \sin 2\pi) = 243.$$

3. Частное от деления $\frac{z_1}{z_2}$ двух комплексных чисел $z_1 = \sqrt{3} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \sin\frac{\pi}{2} \right)$ и $z_2 = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{\pi}{3} \right)$ равно …

$\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot i$ - правильно

$-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot i$

$3+\sqrt{3}\cdot i$

$\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{4}\cdot i$

Решение:

Частное от деления двух комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, находится по формуле:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}\cdot[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\cdot\sin(\varphi_1-\varphi_2)].$$

В нашем случае получим

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\right]=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot i.$$

4. Частное от деления $\frac{z_1}{z_2}$ двух комплексных чисел $z_1=4\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)$ и $z_1=2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right)$ равно …

$\sqrt{3}+i$ - правильно

2

$1+\sqrt{3}\cdot i$

$2\cdot i$

Решение:

Частное от деления двух комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, находится по формуле

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}\cdot[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\cdot\sin(\varphi_1-\varphi_2)].$$

В нашем случае получим

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{4}{2}\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)\right]=2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}+i.$$

5. Дано комплексное число $z=2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)$. Тогда $\bar{z}^3$, где $\bar{z}$ – число, сопряженное числу z, равно …

–8

$-8\cdot i$

8

$8\cdot i$

6. Дано комплексное число $z = 2e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}$. Тогда z^4 равно …

– 16

$16\cdot i$

16

$-16\cdot i$

Решение:

Если комплексное число z в тригонометрической форме имеет вид $z = |z|\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$, то по формуле Муавра $z^n = |z|^n\cdot(\cos n\varphi + i\cdot\sin n\varphi)$, где n – натуральное число.

Запишем число $z = 2e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}$ в тригонометрической форме.

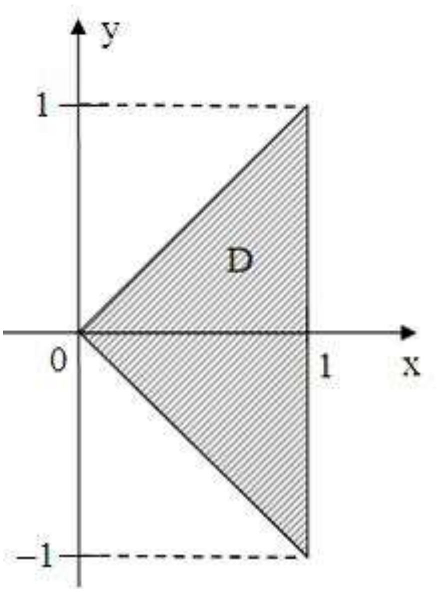
Так как $|z| = 2$, а главное значение аргумента $\varphi = \frac{\pi}{4}$, то $z = 2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Следовательно,

$$z^4 = \left(2e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}\right)^4 = (2)^4\cdot\left(\cos\left(4\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\cdot\sin\left(4\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$16\cdot(\cos\pi + i\cdot\sin\pi) = -16.$$

Тема 26: Области на комплексной плоскости

1. Все точки $z = x + iy$ комплексной плоскости, принадлежащие множеству *D*, изображенному на рисунке,



удовлетворяют условию …

$-\frac{\pi}{4} \le \arg z \le \frac{\pi}{4},\ \ 0 \le \operatorname{Re} z \le 1$ - правильно

$-\frac{\pi}{4} \le \arg z \le \frac{\pi}{4},\ -1 \le \operatorname{Im} z \le 1$

$-\frac{\pi}{4} \le \arg z \le \frac{\pi}{4}$

$-\frac{\pi}{4} \le \arg z \le \frac{\pi}{4},\ |z| \le 1$

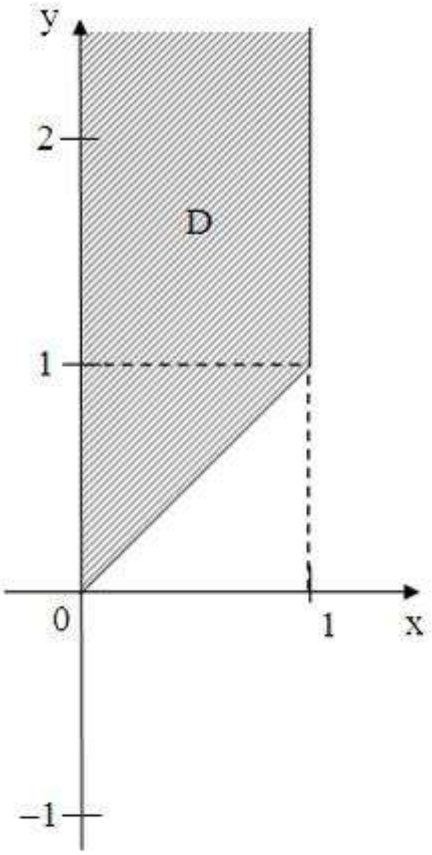
Решение:

Множество $D,$ изображенное на рисунке, ограничено прямыми $y = x;\ y = -x$ и $x = 1$.

Для комплексного числа $z = x + iy$ угол наклона прямой $y = x$ к оси Ox равен $\frac{\pi}{4},$ а прямой $y = -x,$ равен $-\frac{\pi}{4}.$ Следовательно, комплексные числа $z = x + iy,$ принадлежащие множеству $D,$ должны удовлетворять условиям

$-\frac{\pi}{4} \le \arg z \le \frac{\pi}{4},\ 0 \le \operatorname{Re} z \le 1.$

2. Все точки $z = x + iy$ комплексной плоскости, принадлежащие множеству *D*, изображенному на рисунке,



удовлетворяют условию …

$0 \le \operatorname{Re} z \le 1,\ \frac{\pi}{4} \le \arg z \le \frac{\pi}{2}$ - правильно

$0 \le |z| \le 1,\ \frac{\pi}{4} \le \arg z \le \frac{\pi}{2}$

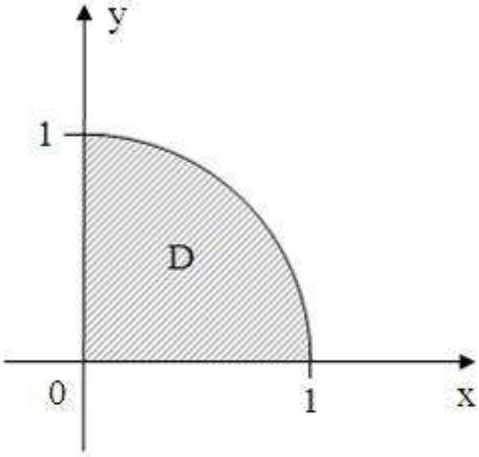
$0 \le |z| \le 1,\ \mathrm{Re} z \le \mathrm{Im}\, z$

$0 \le \mathrm{Re}\, z \le 1,\ \mathrm{Im}\, z \le \mathrm{Re} z$

Решение:

Множество D, изображенное на рисунке, ограничено прямыми $y = x;\ x = 0;\ x = 1$.
Для комплексного числа $z = x + iy$: $x = \mathrm{Re}\, z$ – действительная часть z, $y = \mathrm{Im}\, z$ – мнимая часть z, угол наклона прямой $y = x$ к оси Ox равен $\frac{\pi}{4}$, а прямой $x = 0$ равен $\frac{\pi}{2}$. Следовательно, комплексные числа $z = x + iy$, принадлежащие множеству D, должны удовлетворять условиям $0 \le \mathrm{Re}\, z \le 1, \frac{\pi}{4} \le \arg z \le \frac{\pi}{2}$.

3. Все точки $z = x + iy$ комплексной плоскости, принадлежащие множеству *D*, изображенному на рисунке,



удовлетворяют условию …

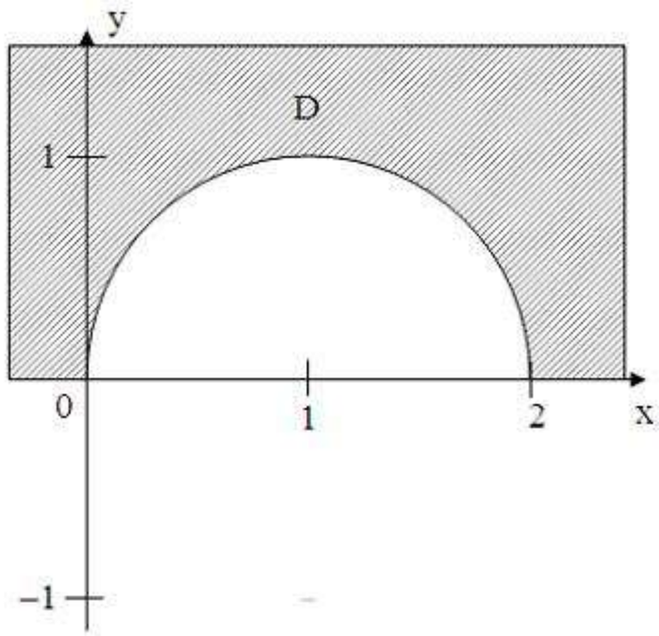
$|z| \le 1;\ 0 \le \arg z \le \frac{\pi}{2}$ - правильно

$0 \le \mathrm{Im}\, z \le 1;\ 0 \le \arg z \le \frac{\pi}{2}$

$0 \le \mathrm{Re}\, z \le 1;\ 0 \le \arg z \le \frac{\pi}{2}$

$|z| \le 1;\ 0 \le \arg z \le 1$

4. Все точки $z = x + iy$ комплексной плоскости, принадлежащие множеству *D*, изображенному на рисунке,



удовлетворяют условию …

$|z-1|\geq 1;\ 0\leq \arg z\leq \pi$ - правильно

$\mathrm{Im}(z-1)\geq 0;\ 0\leq \arg z\leq \pi$

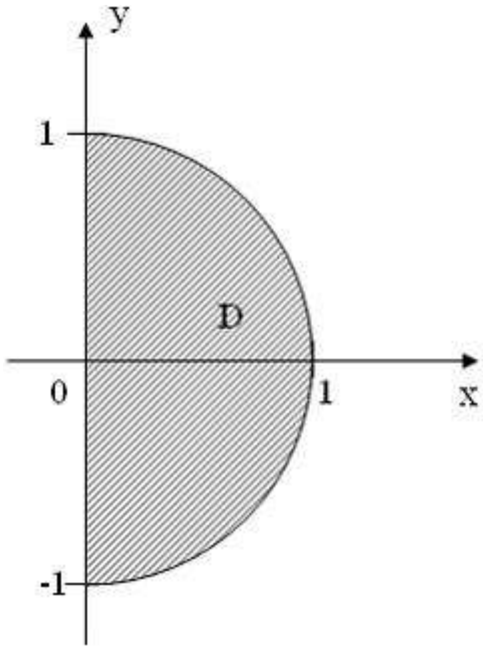
$\mathrm{Re}(z-1)\geq 1;\ 0\leq \arg z\leq \pi$

$|z|\geq 1;\ 0\leq \arg(z-1)\leq \pi$

Решение:

Множество $D,$ изображенное на рисунке, представляет собой внешнюю часть круга с центром в точке $(1,0)$ и радиусом $R=1,$ лежащую в первой и второй четвертях. Следовательно, точки комплексной плоскости, принадлежащие множеству $D,$ удовлетворяют условию $|z-1|\geq 1;\ 0\leq \arg z\leq \pi.$

5. Все точки $z=x+iy$ комплексной плоскости, принадлежащие множеству *D*, изображенному на рисунке,



удовлетворяют условию …

$|z| \le 1; -\frac{\pi}{2} \le \arg z \le \frac{\pi}{2}$ - правильно

$0 \le \operatorname{Im} z \le 1; -\frac{\pi}{2} \le \arg z \le \frac{\pi}{2}$

$0 \le \operatorname{Re} z \le 1; -\frac{\pi}{2} \le \arg z \le \frac{\pi}{2}$

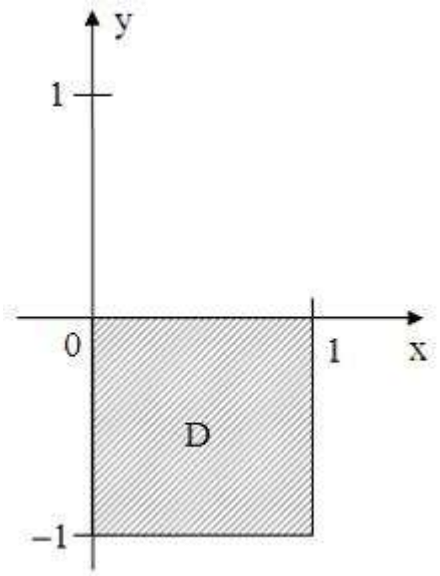
$|z| \le 1; -1 \le \arg z \le 1$

Решение:

Множество $D,$ изображенное на рисунке, представляет собой часть круга с центром в точке $(0, 0)$ и радиусом $R = 1,$ лежащую в первой и четвертой четвертях.

Следовательно, точки комплексной плоскости, принадлежащие множеству $D,$ удовлетворяют условию $|z| \le 1; -\frac{\pi}{2} \le \arg z \le \frac{\pi}{2}.$

6. Все точки $z = x + iy$ комплексной плоскости, принадлежащие множеству *D*, изображенному на рисунке,



удовлетворяют условию …

$0 \le \operatorname{Re} z \le 1; -1 \le \operatorname{Im} z \le 0$ - правильно

$-1 \le \operatorname{Im} z \le 0; -\frac{\pi}{2} \le \arg z \le 0$

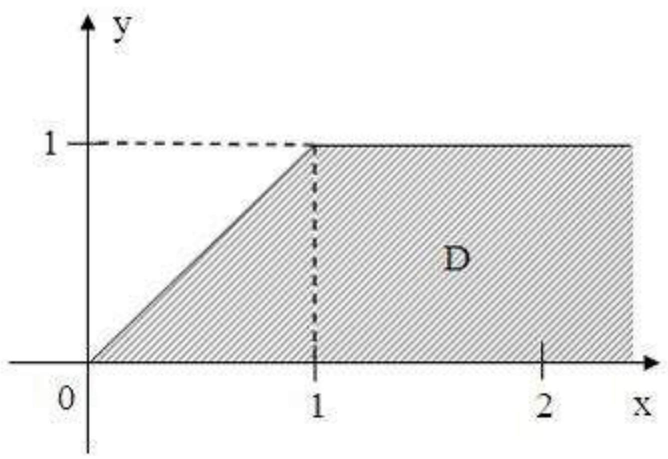
$0 \le \operatorname{Re} z \le 1; -\frac{\pi}{2} \le \arg z \le 0$

$|z| \le 1; -1 \le \arg z \le 0$

Решение:

Множество $D,$ изображенное на рисунке, ограничено прямыми $x = 0; x = 1; y = 0; y = -1.$ Для комплексного числа $z = x + iy$: $x = \operatorname{Re} z$ – действительная часть $z,$ $y = \operatorname{Im} z$ – мнимая часть $z.$ Следовательно, комплексные числа $z = x + iy,$ принадлежащие множеству $D,$ должны удовлетворять условиям $0 \le \operatorname{Re} z \le 1; -1 \le \operatorname{Im} z \le 0.$

7. Все точки $z = x + iy$ комплексной плоскости, принадлежащие множеству *D*, изображенному на рисунке,



удовлетворяют условию …

$0 \le \operatorname{Im} z \le 1,\ 0 \le \arg z \le \dfrac{\pi}{4}$ - правильно

$0 \le |z| \le 1,\ 0 \le \arg z \le \dfrac{\pi}{4}$

$0 \le |z| \le 1,\ \operatorname{Re} z \le \operatorname{Im} z$

$0 \le \operatorname{Im} z \le 1,\ \operatorname{Re} z \le \operatorname{Im} z$

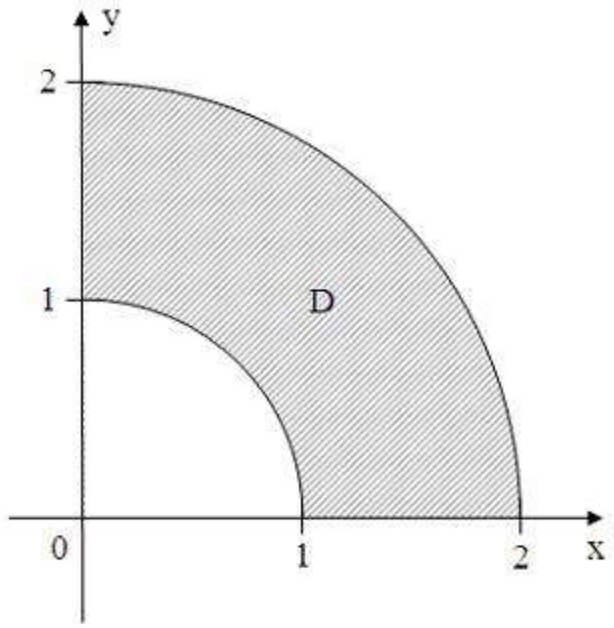
Решение:

Множество *D*, изображенное на рисунке, ограничено прямыми $y = x;\ y = 0;\ y = 1$.

Для комплексного числа $z = x + iy$: $x = \operatorname{Re} z$ – действительная часть z, $y = \operatorname{Im} z$ – мнимая часть *z*, угол наклона прямой $y = x$ к оси *Ox* равен $\dfrac{\pi}{4}$.

Следовательно, комплексные числа $z = x + iy$, принадлежащие множеству D, должны удовлетворять условиям $0 \le \operatorname{Im} z \le 1,\ 0 \le \arg z \le \dfrac{\pi}{4}$.

8. Все точки $z = x + iy$ комплексной плоскости, принадлежащие множеству *D*, изображенному на рисунке,



удовлетворяют условию …

$1 \le |z| \le 2;\ 0 \le \arg z \le \dfrac{\pi}{2}$ - правильно

$1 \le \operatorname{Im} z \le 2;\ 0 \le \arg z \le \dfrac{\pi}{2}$

$1 \le \operatorname{Re} z \le 2;\ 0 \le \arg z \le \dfrac{\pi}{2}$

$1 \le |z| \le 2;\ 0 \le \arg z \le 1$

Решение:

Множество $D,$ изображенное на рисунке, представляет собой часть кольца, ограниченного окружностями с центрами в точке $(0,\,0)$ и радиусами $R=1$ и $R=2,$ лежащую в первой четверти. Следовательно, точки комплексной плоскости, принадлежащие множеству $D,$ удовлетворяют условию $1 \le |z| \le 2;\ 0 \le \arg z \le \frac{\pi}{2}.$

Кейс 1 подзадача 1

1. Фирма планирует организовать выпуск новой продукции, для чего берет в банке кредит в размере 200 тыс. руб. под 20 % годовых. На организацию производства фирме понадобится 30 дней, после чего она ежедневно будет получать прибыль в размере 3 тыс. руб.

Если временная база по начислению процентов равна 365 дням, то размер долга *S* (тыс. руб.) фирмы банку через *t* дней можно определить как …

$S = 200\left(1+\frac{t}{1825}\right)$ - правильно

$S = 200\left(1+\frac{4t}{73}\right)$

$S = 200(1+0{,}2t)$

$S = \frac{200}{1-\frac{t}{1825}}$

Решение:

Наращенную сумму долга можно вычислить по формуле

$S = P\left(1+\frac{t}{K}\cdot\frac{i}{100}\right),$ где $P=200$ тыс. руб., $K=365,$ $i=20.$

Тогда $S = 200\left(1+\frac{t}{365}\cdot\frac{20}{100}\right) = 200\left(1+\frac{t}{1825}\right)$ тыс. руб.

2. Фирма планирует организовать выпуск новой продукции, для чего берет в банке кредит в размере 300 тыс. руб. под 25 % годовых. На организацию производства фирме понадобится 20 дней, после чего она ежедневно будет получать прибыль в размере 4 тыс. руб.

Если временная база по начислению процентов равна 365 дням, то размер долга *S* (тыс. руб.) фирмы банку через *t* дней можно определить как …

$S = 300\left(1+\frac{t}{1460}\right)$ - правильно

$S = 300\left(1+\frac{5t}{73}\right)$

$S = 300(1+0{,}25t)$

$$S=\frac{300}{1-\frac{t}{1460}}$$

Решение:

Наращенную сумму долга можно вычислить по формуле

$S=P\left(1+\frac{t}{K}\cdot\frac{i}{100}\right)$, где $P=300$ тыс. руб., $K=365$, $i=25$.

Тогда $S=300\left(1+\frac{t}{365}\cdot\frac{25}{100}\right)=300\left(1+\frac{t}{1460}\right)$ тыс. руб.

3. Фирма планирует организовать выпуск новой продукции, для чего берет в банке кредит в размере 250 тыс. руб. под 18 % годовых. На организацию производства фирме понадобится 60 дней, после чего она ежедневно будет получать прибыль в размере 7 тыс. руб.

Если временная база по начислению процентов равна 365 дням, то размер долга *S* (тыс. руб.) фирмы банку через *t* дней можно определить как …

$S=250\left(1+\frac{9t}{18250}\right)$ - правильно

$$S=250\left(1+\frac{18t}{365}\right)$$

$$S=250(1+0{,}18t)$$

$$S=\frac{250}{1-\frac{9t}{18250}}$$

Решение:

Наращенную сумму долга можно вычислить по формуле

$S=P\left(1+\frac{t}{K}\cdot\frac{i}{100}\right)$, где $P=250$ тыс. руб., $K=365$, $i=18$.

Тогда $S=250\left(1+\frac{t}{365}\cdot\frac{18}{100}\right)=250\left(1+\frac{9t}{18250}\right)$ тыс. руб.

4. Фирма планирует организовать выпуск новой продукции, для чего берет в банке кредит в размере 200 тыс. руб. под 15 % годовых. На организацию производства фирме понадобится 50 дней, после чего она ежедневно будет получать прибыль в размере 6 тыс. руб.

Если временная база по начислению процентов равна 365 дням, то размер долга *S* (тыс. руб.) фирмы банку через *t* дней можно определить как …

$S=200\left(1+\frac{3t}{7300}\right)$ - правильно

$S = 200\left(1 + \frac{3t}{73}\right)$

$S = 200(1 + 0{,}15t)$

$S = \frac{200}{1 - \frac{3t}{7300}}$

Решение:

Наращенную сумму долга можно вычислить по формуле

$S = P\left(1 + \frac{t}{K} \cdot \frac{i}{100}\right)$, где $P = 200$ тыс. руб., $K = 365$, $i = 15$.

Тогда $S = 200\left(1 + \frac{t}{365} \cdot \frac{15}{100}\right) = 200\left(1 + \frac{3t}{7300}\right)$ тыс. руб.

Кейс 1 подзадача 2

1. Фирма планирует организовать выпуск новой продукции, для чего берет в банке кредит в размере 200 тыс. руб. под 20 % годовых. На организацию производства фирме понадобится 30 дней, после чего она ежедневно будет получать прибыль в размере 3 тыс. руб.

Установите соответствие между количеством дней *t*, прошедших с момента получения кредита, и прибылью (тыс. руб.) фирмы.

1. $t = 15$
2. $t = 35$
3. $t = 45$

1. 0
2. 15
3. 45

105

135

Решение:

Прибыль фирмы можно определить как

$$\Pi(t) = \begin{cases} 0, & t \le 30, \\ 3(t - 30), & t > 30. \end{cases}$$

Тогда

1) $\Pi(15) = 0$ тыс. руб.;

2) $\Pi(35) = 3(35 - 30) = 15$ тыс. руб.;

3) $\Pi(45) = 3(45 - 30) = 45$ тыс. руб.

2. Фирма планирует организовать выпуск новой продукции, для чего берет в банке кредит в размере 300 тыс. руб. под 25 % годовых. На организацию производства фирме понадобится 20 дней, после чего она ежедневно будет получать прибыль в размере 4 тыс. руб.

Установите соответствие между количеством дней *t*, прошедших с момента получения кредита, и прибылью (тыс. руб.) фирмы.

1. $t = 10$
2. $t = 30$
3. $t = 45$
1. 0
2. 40
3. 100
120
180

Решение:

Прибыль фирмы можно определить как

$$\Pi(t) = \begin{cases} 0, \ t \le 20, \\ 4(t-20), \ t > 20. \end{cases}$$

Тогда

1) $\Pi(10) = 0$ тыс. руб.;
2) $\Pi(30) = 4(30-20) = 40$ тыс. руб.;
3) $\Pi(45) = 4(45-20) = 100$ тыс. руб.

3. Фирма планирует организовать выпуск новой продукции, для чего берет в банке кредит в размере 250 тыс. руб. под 18 % годовых. На организацию производства фирме понадобится 60 дней, после чего она ежедневно будет получать прибыль в размере 7 тыс. руб.

Установите соответствие между количеством дней *t*, прошедших с момента получения кредита, и прибылью (тыс. руб.) фирмы.

1. $t = 40$
2. $t = 70$
3. $t = 90$
1. 0
2. 70
3. 210
490
630

Решение:

$$\Pi(t) = \begin{cases} 0, \ t \le 60, \\ 7(t-60), \ t > 60. \end{cases}$$

Тогда

1. $\Pi(40) = 0$ тыс. руб.;
2. $\Pi(70) = 7(70-60) = 70$ тыс. руб.;
3. $\Pi(90) = 7(90-60) = 210$ тыс. руб.

4. Фирма планирует организовать выпуск новой продукции, для чего берет в банке кредит в размере 200 тыс. руб. под 15 % годовых. На организацию производства фирме понадобится 50 дней, после чего она ежедневно будет получать прибыль в размере 6 тыс. руб.

Установите соответствие между количеством дней *t*, прошедших с момента получения кредита, и прибылью (тыс. руб.) фирмы.

1. $t = 30$
2. $t = 60$
3. $t = 80$

1. 0
2. 60
3. 180

360
480

Решение:

$$\Pi(t) = \begin{cases} 0, & t \le 50, \\ 6(t-50), & t > 50. \end{cases}$$

Тогда

1. $\Pi(30) = 0$ тыс. руб.;
2. $\Pi(60) = 6(60-50) = 60$ тыс. руб.;
3. $\Pi(80) = 6(80-50) = 180$ тыс. руб.

Кейс 1 подзадача 3

1. Фирма планирует организовать выпуск новой продукции, для чего берет в банке кредит в размере 200 тыс. руб. под 20 % годовых. На организацию производства фирме понадобится 30 дней, после чего она ежедневно будет получать прибыль в размере 3 тыс. руб.

Фирма может погасить кредит разовым платежом за счет полученной прибыли как минимум чем через _____ день (дня, дней) после получения кредита.

101

Решение:

Решим линейное неравенство $\Pi(t) > S(t)$, а именно:

$$3(t-30) > 200\left(1 + \frac{t}{1825}\right).$$

Тогда $t > 100{,}33$, то есть кредит разовым платежом можно погасить как минимум через 101 день.

2. Фирма планирует организовать выпуск новой продукции, для чего берет в банке кредит в размере 250 тыс. руб. под 18 % годовых. На организацию производства фирме понадобится 60 дней, после чего она ежедневно будет получать прибыль в размере 7 тыс. руб.

Фирма может погасить кредит разовым платежом за счет полученной прибыли как минимум чем через _____ день (дня, дней) после получения кредита.

98

Решение:

Решим линейное неравенство $\Pi(t) > S(t),$ а именно:

$$7(t-60) > 250\left(1+\frac{9t}{18250}\right).$$

Тогда $t > 97{,}43,$ то есть кредит разовым платежом можно погасить как минимум через 98 дней.

3. Фирма планирует организовать выпуск новой продукции, для чего берет в банке кредит в размере 200 тыс. руб. под 15 % годовых. На организацию производства фирме понадобится 50 дней, после чего она ежедневно будет получать прибыль в размере 6 тыс. руб.

Фирма может погасить кредит разовым платежом за счет полученной прибыли как минимум чем через _____ день (дня, дней) после получения кредита.

85

Решение:

Решим линейное неравенство $\Pi(t) > S(t),$ а именно:

$$6(t-50) > 200\left(1+\frac{3t}{7300}\right).$$

Тогда $t > 84{,}49,$ то есть кредит разовым платежом можно погасить как минимум через 85 дней.

4. Фирма планирует организовать выпуск новой продукции, для чего берет в банке кредит в размере 300 тыс. руб. под 25 % годовых. На организацию производства фирме понадобится 20 дней, после чего она ежедневно будет получать прибыль в размере 4 тыс. руб.

Фирма может погасить кредит разовым платежом за счет полученной прибыли как минимум чем через _____ день (дня, дней) после получения кредита.

101

Решение:

Решим линейное неравенство $\Pi(t) > S(t),$ а именно:

$$4(t-20) > 300\left(1+\frac{t}{1460}\right).$$

Тогда $t > 100{,}14,$ то есть кредит разовым платежом можно погасить как минимум через 101 день.

Кейс 2 подзадача 1

1. Инвестор вложил одну треть своего капитала, равного 30 тыс. руб., в акции *A*, а оставшуюся часть – в акции *B*. Через один год сумма его капитала увеличилась на 4 тыс. руб. Если бы инвестор распределил свой капитал наоборот, то увеличение капитала составило бы 3,5 тыс. руб.

Процентный доход по акциям *A* за год составил ___ %.

10

Решение:

Пусть x – процентный доход по акциям A за год, а y – по акциям B. Тогда условия задачи могут быть представлены в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} 10(1+x) + 20(1+y) = 34, \\ 20(1+x) + 10(1+y) = 33{,}5, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x + 2y = 0{,}4, \\ 2x + y = 0{,}35. \end{cases}$$

Решив систему, получим, что $x = 0{,}1$ и $y = 0{,}15$. Следовательно, процентный доход по акциям A за год составил 10 %.

2. Инвестор вложил одну четверть своего капитала, равного 60 тыс. руб., в акции *A*, а оставшуюся часть – в акции *B*. Через один год сумма его капитала увеличилась на 9,75 тыс. руб. Если бы инвестор распределил свой капитал наоборот, то увеличение капитала составляло бы 11,25 тыс. руб.

Процентный доход по акциям *A* за год составил ____ %.

20

Решение:

Пусть x – процентный доход по акциям A за год; y – по акциям B. Тогда условия задачи могут быть представлены в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} 15(1+x) + 45(1+y) = 69{,}75, \\ 45(1+x) + 15(1+y) = 71{,}25, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x + 3y = 0{,}65, \\ 3x + y = 0{,}75. \end{cases}$$

Решив систему, получим, что $x = 0{,}2$ и $y = 0{,}15$. Следовательно, процентный доход по акциям A за год составил 20 %.

3. Инвестор вложил одну треть своего капитала, равного 90 тыс. руб., в акции *A*, а оставшуюся часть – в акции *B*. Через один год сумма его капитала увеличилась на 10,5 тыс. руб. Если бы инвестор распределил свой капитал наоборот, то увеличение капитала составляло бы 12.0 тыс. руб.

Процентный доход по акциям *A* за год составил ____ %.

15

Решение:

Пусть x – процентный доход по акциям A за год; y – по акциям B. Тогда условия задачи могут быть представлены в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} 30(1+x) + 60(1+y) = 100{,}5, \\ 60(1+x) + 30(1+y) = 102{,}0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x + 2y = 0{,}35, \\ 2x + y = 0{,}40. \end{cases}$$

Решив систему, получим, что $x = 0{,}15$ и $y = 0{,}10$. Следовательно, процентный доход по акциям A за год составил 15 %.

4. Инвестор вложил одну четверть своего капитала, равного 80 тыс. руб., в акции *A*, а оставшуюся часть – в акции *B*. Через один год сумма его капитала увеличилась на 15,0 тыс. руб. Если бы инвестор распределил свой капитал наоборот, то увеличение капитала составляло бы 13,0 тыс. руб.

Процентный доход по акциям *A* за год составил ____ %.

15

Решение:

Пусть x – процентный доход по акциям A за год; y – по акциям B. Тогда условия задачи могут быть представлены в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} 20(1 + x) + 60(1 + y) = 95{,}0, \\ 60(1 + x) + 20(1 + y) = 93{,}0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x + 3y = 0{,}75, \\ 3x + y = 0{,}65. \end{cases}$$

Решив систему, получим, что $x = 0{,}15$ и $y = 0{,}20$. Следовательно, процентный доход по акциям A за год составил 15 %.

Кейс 2 подзадача 2

1. Инвестор вложил одну треть своего капитала, равного 30 тыс. руб., в акции *A*, а оставшуюся часть – в акции *B*. Через один год сумма его капитала увеличилась на 4 тыс. руб. Если бы инвестор распределил свой капитал наоборот, то увеличение капитала составило бы 3,5 тыс. руб.

Отношение доходности акций *A* к доходности акций *B* равно …

$\frac{2}{3}$ - правильно

$\frac{3}{2}$

$\frac{10}{3}$

$\frac{3}{10}$

Решение:

Пусть x – процентный доход по акциям A за год; y – по акциям B. Тогда процентный доход по акциям A за год равен 10 %, по акциям B – 15 %. Следовательно, отношение доходности акций A к доходности акций B равно $\frac{10\%}{15\%} = \frac{2}{3}$.

2. Инвестор вложил одну четверть своего капитала, равного 60 тыс. руб., в акции *A*, а оставшуюся часть – в акции *B*. Через один год сумма его капитала увеличилась на 9,75 тыс. руб. Если бы инвестор распределил свой капитал наоборот, то увеличение капитала составляло бы 11,25 тыс. руб.

Отношение доходности акций *A* к доходности акций *B* равно …

$\frac{4}{3}$ - правильно

$\frac{3}{4}$

$\frac{29}{27}$

$\frac{27}{29}$

Решение:

Пусть x – процентный доход по акциям A за год; y – по акциям B. Тогда процентный доход по акциям A за год равен 20 %, по акциям B – 15 %. Следовательно, отношение доходности акций A к доходности акций B равно $\frac{20\%}{15\%} = \frac{4}{3}$.

3. Инвестор вложил одну треть своего капитала, равного 90 тыс. руб., в акции *A*, а оставшуюся часть – в акции *B*. Через один год сумма его капитала увеличилась на 10,5 тыс. руб. Если бы инвестор распределил свой капитал наоборот, то увеличение капитала составляло бы 12.0 тыс. руб.

Отношение доходности акций *B* к доходности акций *A* равно …

$\frac{2}{3}$ - правильно

$\frac{3}{2}$

$\frac{8}{7}$

$\frac{7}{8}$

4. Инвестор вложил одну четверть своего капитала, равного 80 тыс. руб., в акции *A*, а оставшуюся часть – в акции *B*. Через один год сумма его капитала увеличилась на 15,0 тыс. руб. Если бы инвестор распределил свой капитал наоборот, то увеличение капитала составляло бы 13,0 тыс. руб.

Отношение доходности акций *B* к доходности акций *A* равно …

$\frac{4}{3}$ - правильно

$\frac{3}{4}$

$\frac{15}{13}$

$\frac{13}{15}$

Решение:

Пусть x – процентный доход по акциям A за год; y – по акциям B. Тогда процентный доход по акциям A за год равен 15 %, по акциям B – 20 %. Следовательно, отношение доходности акций B к доходности акций A равно $\frac{20\%}{15\%} = \frac{4}{3}$.

5. Инвестор вложил одну четверть своего капитала, равного 40 тыс. руб., в акции *A*, а оставшуюся часть – в акции *B*. Через один год сумма его капитала увеличилась на 5,5 тыс. руб. Если бы инвестор распределил свой капитал наоборот, то увеличение капитала составляло бы 4,5 тыс. руб.

Отношение доходности акций *B* к доходности акций *A* равно …

$\frac{3}{2}$ - правильно

$\frac{2}{3}$

$\frac{10}{3}$

$\frac{3}{10}$

Решение:

Пусть x – процентный доход по акциям A за год; y – по акциям B. Тогда процентный доход по акциям A за год равен 10 %, по акциям B – 15 %. Следовательно, отношение доходности акций B к доходности акций A равно $\frac{15\%}{10\%} = \frac{3}{2}$.

Кейс 2 подзадача 3

1. Инвестор вложил одну треть своего капитала, равного 30 тыс. руб., в акции *A*, а оставшуюся часть – в акции *B*. Через один год сумма его капитала увеличилась на 4 тыс. руб. Если бы инвестор распределил свой капитал наоборот, то увеличение капитала составило бы 3,5 тыс. руб.

Пусть процентный доход по акциям *B* не изменяется. Установите соответствие между годовым процентным доходом по акциям *A* и размером капитала инвестора.

1. 15 %

2. 20 %
3. 25 %
1. 34500 руб.
2. 35000 руб.
3. 35500 руб.
33500 руб.
34000 руб.

Решение:

Пусть x – процентный доход по акциям A за год; y – по акциям B. Тогда годовой процентный доход по акциям B равен 15%.

1. Если процентный доход по акциям A за год составляет 15%, то размер капитала инвестора равен $10(1+0{,}15)+20(1+0{,}15)=11{,}5+23=34{,}5,$ то есть 34 500 руб.
2. Если процентный доход по акциям A за год составляет 20%, то размер капитала инвестора равен $10(1+0{,}2)+20(1+0{,}15)=12+23=35,$ то есть 35 000 руб.
3. Если процентный доход по акциям A за год составляет 25%, то размер капитала инвестора равен $10(1+0{,}25)+20(1+0{,}15)=12{,}5+23=35{,}5,$ то есть 35 500 руб.

2. Инвестор вложил одну четверть своего капитала, равного 60 тыс. руб., в акции *A*, а оставшуюся часть – в акции *B*. Через один год сумма его капитала увеличилась на 9,75 тыс. руб. Если бы инвестор распределил свой капитал наоборот, то увеличение капитала составляло бы 11,25 тыс. руб.

Пусть процентный доход по акциям *B* не изменяется. Установите соответствие между годовым процентным доходом по акциям *A* и размером капитала инвестора.

1. 10 %
2. 15 %
3. 25 %
1. 68250 руб
2. 69000 руб
3. 70500 руб
69750 руб
71250 руб

Решение:

Пусть x – процентный доход по акциям A за год; y – по акциям $B.$ Тогда годовой процентный доход по акциям B равен 15%.

1. Если процентный доход по акциям A за год составляет 10%, то размер капитала инвестора равен $15(1+0{,}1)+45(1+0{,}15)=16{,}5+51{,}75=68{,}25,$ то есть 68 250 руб.
2. Если процентный доход по акциям A за год составляет 15%, то размер капитала инвестора равен $15(1+0{,}15)+45(1+0{,}15)=17{,}25+51{,}75=69,$ то есть 69 000 руб.
3. Если процентный доход по акциям A за год составляет 25%, то размер капитала инвестора равен $15(1+0{,}25)+45(1+0{,}15)=18{,}75+51{,}75=70{,}5,$ то есть 70 500 руб.

3. Инвестор вложил одну треть своего капитала, равного 90 тыс. руб., в акции *A*, а оставшуюся часть – в акции *B*. Через один год сумма его капитала увеличилась на 10,5

тыс. руб. Если бы инвестор распределил свой капитал наоборот, то увеличение капитала составляло бы 12.0 тыс. руб.

Пусть процентный доход по акциям *B* не изменяется. Установите соответствие между годовым процентным доходом по акциям *A* и размером капитала инвестора.

1. 10 %
2. 20 %
3. 30 %
1. 99000 руб.
2. 102000 руб.
3. 105000 руб
100500 руб
103500 руб

Решение:

Пусть x – процентный доход по акциям A за год; y – по акциям $B.$ Тогда годовой процентный доход по акциям B равен 10%.

1. Если процентный доход по акциям A за год составляет 10%, то размер капитала инвестора равен $30(1+0{,}1)+60(1+0{,}10)=33+66=99{,}0,$ то есть 99 000 руб.
2. Если процентный доход по акциям A за год составляет 20%, то размер капитала инвестора равен $30(1+0{,}2)+60(1+0{,}10)=36+66=102{,}0,$ то есть 102 000 руб.
3. Если процентный доход по акциям A за год составляет 30%, то размер капитала инвестора равен $30(1+0{,}3)+60(1+0{,}10)=39+66=105{,}0,$ то есть 105 000 руб.

4. Инвестор вложил одну четверть своего капитала, равного 80 тыс. руб., в акции *A*, а оставшуюся часть – в акции *B*. Через один год сумма его капитала увеличилась на 15,0 тыс. руб. Если бы инвестор распределил свой капитал наоборот, то увеличение капитала составляло бы 13,0 тыс. руб.

Пусть процентный доход по акциям *B* не изменяется. Установите соответствие между годовым процентным доходом по акциям *A* и размером капитала инвестора.

1. 10 %
2. 20 %
3. 30 %
1. 94000 руб.
2. 96000 руб.
3. 98000 руб.
97000 руб.
 95000 руб.

Решение:

Пусть x – процентный доход по акциям A за год; y – по акциям $B.$ Тогда годовой процентный доход по акциям B равен 20%.

1. Если процентный доход по акциям A за год составляет 10%, то размер капитала инвестора равен $20(1+0{,}1)+60(1+0{,}20)=22+72=94{,}0,$ то есть 94 000 руб.
2. Если процентный доход по акциям A за год составляет 20%, то размер капитала

инвестора равен $20(1+0{,}2)+60(1+0{,}20)=24+72=96{,}0,$ то есть 96 000 руб.
3. Если процентный доход по акциям A за год составляет 30%, то размер капитала инвестора равен $20(1+0{,}3)+60(1+0{,}20)=26+72=98{,}0,$ то есть 98 000 руб.

5. Инвестор вложил одну четверть своего капитала, равного 40 тыс. руб., в акции *A*, а оставшуюся часть – в акции *B*. Через один год сумма его капитала увеличилась на 5,5 тыс. руб. Если бы инвестор распределил свой капитал наоборот, то увеличение капитала составляло бы 4,5 тыс. руб.

Пусть процентный доход по акциям *B* не изменяется. Установите соответствие между годовым процентным доходом по акциям *A* и размером капитала инвестора.

1. 15 %
2. 20 %
3. 25 %
1. 46000 руб
2. 46500 руб
3. 47000 руб
47500 руб
48000 руб

Решение:
Пусть x – процентный доход по акциям A за год; y – по акциям $B.$ Тогда годовой процентный доход по акциям B равен 15%.
1. Если процентный доход по акциям A за год составляет 15%, то размер капитала инвестора равен $10(1+0{,}15)+30(1+0{,}15)=11{,}5+34{,}5=46,$ то есть 46 000 руб.
2. Если процентный доход по акциям A за год составляет 20%, то размер капитала инвестора равен $10(1+0{,}2)+30(1+0{,}15)=12+34{,}5=46{,}5,$ то есть 46 500 руб.
3. Если процентный доход по акциям A за год составляет 25%, то размер капитала инвестора равен $10(1+0{,}25)+30(1+0{,}15)=12{,}5+34{,}5=47,$ то есть 47 000 руб.

Кейс 3 подзадача 1
1. Предприятие производит продукцию трех видов, используя для этого два вида сырья. Нормы затрат сырья (в у.е.) на производство одной единицы изделия каждого вида указаны в таблице.

Виды сырья	Виды продукции		
	A_1	A_2	A_3
S_1	4	3	5
S_2	3	2	1

Если ввести обозначения: x_1 – объем используемого ресурса S_1, x_2 – объем S_2, y_1, y_2 и y_3 – объемы произведенной продукции видов A_1, A_2 и A_3 соответственно, то полные затраты ресурсов (сырья) можно определить из системы линейных уравнений вида …

$$\begin{cases} x_1 = 4y_1 + 3y_2 + 5y_3, \\ x_2 = 3y_1 + 2y_2 + y_3 \end{cases}$$ - правильно

$$\begin{cases} x_1 = 3y_1 + 2y_2 + y_3, \\ x_2 = 4y_1 + 3y_2 + 5y_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 4y_1 + 2y_2 + 5y_3, \\ x_2 = 3y_1 + 3y_2 + y_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 3y_1 + 3y_2 + y_3, \\ x_2 = 4y_1 + 2y_2 + 5y_3 \end{cases}$$

2. Предприятие производит продукцию трех видов, используя для этого два вида сырья. Нормы затрат сырья (в у.е.) на производство одной единицы изделия каждого вида указаны в таблице.

Виды сырья	Виды продукции		
	A_1	A_2	A_3
S_1	3	2	4
S_2	1	5	2

Если ввести обозначения: x_1 – объем используемого ресурса S_1, x_2 – объем S_2, y_1, y_2 и y_3 – объемы произведенной продукции видов A_1, A_2 и A_3 соответственно, то полные затраты ресурсов (сырья) можно определить из системы линейных уравнений вида …

$$\begin{cases} x_1 = 3y_1 + 2y_2 + 4y_3, \\ x_2 = y_1 + 5y_2 + 2y_3 \end{cases}$$ - правильно

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + 5y_2 + 2y_3, \\ x_2 = 3y_1 + 2y_2 + 4y_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 3y_1 + 5y_2 + 4y_3, \\ x_2 = y_1 + 2y_2 + 2y_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + 2y_2 + 2y_3, \\ x_2 = 3y_1 + 5y_2 + 4y_3 \end{cases}$$

Решение:

Так как нормы затрат сырья на производство одной единицы продукции известны, то полные затраты ресурсов вычисляются как произведение норм расхода сырья на соответствующие объемы произведенной продукции, то есть:

$$\begin{cases} x_1 = 3y_1 + 2y_2 + 4y_3, \\ x_2 = y_1 + 5y_2 + 2y_3. \end{cases}$$

3. Предприятие производит продукцию трех видов, используя для этого два вида сырья. Нормы затрат сырья (в у.е.) на производство одной единицы изделия каждого вида указаны в таблице.

Виды сырья	Виды продукции		
	A_1	A_2	A_3
S_1	3	4	2
S_2	4	1	3

Если ввести обозначения: x_1 – объем используемого ресурса S_1, x_2 – объем S_2, y_1, y_2 и y_3 – объемы произведенной продукции видов A_1, A_2 и A_3 соответственно, то полные затраты ресурсов (сырья) можно определить из системы линейных уравнений вида …

$\begin{cases} x_1 = 3y_1 + 4y_2 + 2y_3, \\ x_2 = 4y_1 + y_2 + 3y_3 \end{cases}$ - правильно

$\begin{cases} x_1 = 4y_1 + y_2 + 3y_3, \\ x_2 = 3y_1 + 4y_2 + 2y_3 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 = 3y_1 + y_2 + 2y_3, \\ x_2 = 4y_1 + 4y_2 + 3y_3 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 = 4y_1 + 4y_2 + 3y_3, \\ x_2 = 3y_1 + y_2 + 2y_3 \end{cases}$

Решение:

Так как нормы затрат сырья на производство одной единицы продукции известны, то полные затраты ресурсов вычисляются как произведение норм расхода сырья на соответствующие объемы произведенной продукции, то есть:

$$\begin{cases} x_1 = 3y_1 + 4y_2 + 2y_3, \\ x_2 = 4y_1 + y_2 + 3y_3. \end{cases}$$

4. Предприятие производит продукцию трех видов, используя для этого два вида сырья. Нормы затрат сырья (в у.е.) на производство одной единицы изделия каждого вида указаны в таблице.

Виды сырья	Виды продукции		
	A_1	A_2	A_3
S_1	5	3	1
S_2	2	2	3

Если ввести обозначения: x_1 – объем используемого ресурса S_1, x_2 – объем S_2, y_1, y_2 и y_3 – объемы произведенной продукции видов A_1, A_2 и A_3 соответственно, то полные затраты ресурсов (сырья) можно определить из системы линейных уравнений вида …

$$\begin{cases} x_1 = 5y_1 + 3y_2 + y_3, \\ x_2 = 2y_1 + 2y_2 + 3y_3 \end{cases}$$ - правильно

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 + 2y_2 + 3y_3, \\ x_2 = 5y_1 + 3y_2 + y_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 5y_1 + 2y_2 + y_3, \\ x_2 = 2y_1 + 3y_2 + 3y_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 + 3y_2 + 3y_3, \\ x_2 = 5y_1 + 2y_2 + y_3 \end{cases}$$

Решение:

Так как нормы затрат сырья на производство одной единицы продукции известны, то полные затраты ресурсов вычисляются как произведение норм расхода сырья на соответствующие объемы произведенной продукции, то есть:

$$\begin{cases} x_1 = 5y_1 + 3y_2 + y_3, \\ x_2 = 2y_1 + 2y_2 + 3y_3. \end{cases}$$

5. Предприятие производит продукцию трех видов, используя для этого два вида сырья. Нормы затрат сырья (в у.е.) на производство одной единицы изделия каждого вида указаны в таблице.

Виды сырья	Виды продукции		
	A_1	A_2	A_3
S_1	**2**	**3**	**5**
S_2	**4**	**2**	**1**

Если ввести обозначения: x_1 – объем используемого ресурса S_1, x_2 – объем S_2, y_1, y_2 и y_3 – объемы произведенной продукции видов A_1, A_2 и A_3 соответственно, то полные затраты ресурсов (сырья) можно определить из системы линейных уравнений вида …

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 + 3y_2 + 5y_3, \\ x_2 = 4y_1 + 2y_2 + y_3 \end{cases}$$ - правильно

$$\begin{cases} x_1 = 4y_1 + 2y_2 + y_3, \\ x_2 = 2y_1 + 3y_2 + 5y_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 + 2y_2 + 5y_3, \\ x_2 = 4y_1 + 3y_2 + y_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 4y_1 + 3y_2 + y_3, \\ x_2 = 2y_1 + 2y_2 + 5y_3 \end{cases}$$

Решение:

Так как нормы затрат сырья на производство одной единицы продукции известны, то полные затраты ресурсов вычисляются как произведение норм расхода сырья на соответствующие объемы произведенной продукции, то есть:

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 + 3y_2 + 5y_3, \\ x_2 = 4y_1 + 2y_2 + y_3. \end{cases}$$

Кейс 3 подзадача 2

1. Предприятие производит продукцию трех видов, используя для этого два вида сырья. Нормы затрат сырья (в у.е.) на производство одной единицы изделия каждого вида указаны в таблице.

Виды сырья	Виды продукции		
	A_1	A_2	A_3
S_1	4	3	5
S_2	3	2	1

Установите соответствие между объемами произведенной продукции $Y = (y_1; y_2; y_3)$ и полными затратами ресурсов $X = (x_1; x_2)$.

1. $Y = (5; 4; 3)$
2. $Y = (5; 3; 4)$
3. $Y = (5; 4; 4)$

$X = (47; 27)$ - 1

$X = (49; 25)$ - 2

$X = (52; 27)$ - 3

$X = (27; 47)$

$X = (25; 49)$

Решение:

Так как полные затраты ресурсов определяются из системы уравнений вида

$$\begin{cases} x_1 = 4y_1 + 3y_2 + 5y_3, \\ x_2 = 3y_1 + 2y_2 + y_3, \end{cases}$$ то:

1. $\begin{cases} x_1 = 4 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 3 = 47, \\ x_2 = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 27. \end{cases}$
2. $\begin{cases} x_1 = 4 \cdot 5 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 49, \\ x_2 = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 25. \end{cases}$
3. $\begin{cases} x_1 = 4 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 4 = 52, \\ x_2 = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 4 = 27. \end{cases}$

2. Предприятие производит продукцию трех видов, используя для этого два вида сырья. Нормы затрат сырья (в у.е.) на производство одной единицы изделия каждого вида указаны в таблице.

Виды сырья	Виды продукции		
	A_1	A_2	A_3
S_1	3	2	4
S_2	1	5	2

Установите соответствие между объемами произведенной продукции $Y = (y_1; y_2; y_3)$ и полными затратами ресурсов $X = (x_1; x_2)$.

1. $Y = (6; 5; 4)$
2. $Y = (6; 5; 3)$
3. $Y = (6; 4; 3)$

$X = (44; 39)$ - 1

$X = (40; 37)$ - 2

$X = (38; 32)$ - 3

$X = (39; 44)$

$X = (37; 40)$

Решение:

Так как полные затраты ресурсов определяются из системы уравнений вида

$$\begin{cases} x_1 = 3y_1 + 2y_2 + 4y_3, \\ x_2 = y_1 + 5y_2 + 2y_3, \end{cases}$$ то:

1. $\begin{cases} x_1 = 3 \cdot 6 + 2 \cdot 5 + 4 \cdot 4 = 44, \\ x_2 = 1 \cdot 6 + 5 \cdot 5 + 2 \cdot 4 = 39. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 = 3 \cdot 6 + 2 \cdot 5 + 4 \cdot 3 = 40, \\ x_2 = 1 \cdot 6 + 5 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = 37. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 = 3 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 38, \\ x_2 = 1 \cdot 6 + 5 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 32. \end{cases}$

3. Предприятие производит продукцию трех видов, используя для этого два вида сырья. Нормы затрат сырья (в у.е.) на производство одной единицы изделия каждого вида указаны в таблице.

Виды сырья	**Виды продукции**		
	A_1	A_2	A_3
S_1	**3**	**4**	**2**
S_2	**4**	**1**	**3**

Установите соответствие между объемами произведенной продукции $Y = (y_1; y_2; y_3)$ и полными затратами ресурсов $X = (x_1; x_2)$.

1. $Y = (4; 5; 6)$
2. $Y = (4; 6; 7)$
3. $Y = (4; 7; 8)$

$X = (44; 39)$ - 1

$X = (50; 43)$ - 2

$X = (56; 47)$ - 3

$X = (39; 44)$

$X = (43; 50)$

Решение:

Так как полные затраты ресурсов определяются из системы уравнений вида

$$\begin{cases} x_1 = 3y_1 + 4y_2 + 2y_3, \\ x_2 = 4y_1 + y_2 + 3y_3, \end{cases}$$ то:

1. $\begin{cases} x_1 = 3\cdot 4 + 4\cdot 5 + 2\cdot 6 = 44, \\ x_2 = 4\cdot 4 + 1\cdot 5 + 3\cdot 6 = 39. \end{cases}$
2. $\begin{cases} x_1 = 3\cdot 4 + 4\cdot 6 + 2\cdot 7 = 50, \\ x_2 = 4\cdot 4 + 1\cdot 6 + 3\cdot 7 = 43. \end{cases}$
3. $\begin{cases} x_1 = 3\cdot 4 + 4\cdot 7 + 2\cdot 8 = 56, \\ x_2 = 4\cdot 4 + 1\cdot 7 + 3\cdot 8 = 47. \end{cases}$

4. Предприятие производит продукцию трех видов, используя для этого два вида сырья. Нормы затрат сырья (в у.е.) на производство одной единицы изделия каждого вида указаны в таблице.

Виды сырья	Виды продукции		
	A_1	A_2	A_3
S_1	5	3	1
S_2	2	2	3

Установите соответствие между объемами произведенной продукции $Y = (y_1; y_2; y_3)$ и полными затратами ресурсов $X = (x_1; x_2)$.

1. $Y = (3; 5; 4)$
2. $Y = (3; 6; 5)$
3. $Y = (3; 7; 6)$

$X = (34; 28)$ - 1

$X = (38; 33)$ - 2

$X=(42;38)$ - 3

$X=(28;34)$

$X=(33;38)$

Решение:

Так как полные затраты ресурсов определяются из системы уравнений вида

$$\begin{cases} x_1 = 5y_1 + 3y_2 + y_3, \\ x_2 = 2y_1 + 2y_2 + 3y_3, \end{cases}$$ то:

1. $\begin{cases} x_1 = 5\cdot3 + 3\cdot5 + 1\cdot4 = 34, \\ x_2 = 2\cdot3 + 2\cdot5 + 3\cdot4 = 28. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 = 5\cdot3 + 3\cdot6 + 1\cdot5 = 38, \\ x_2 = 2\cdot3 + 2\cdot6 + 3\cdot5 = 33. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 = 5\cdot3 + 3\cdot7 + 1\cdot6 = 42, \\ x_2 = 2\cdot3 + 2\cdot7 + 3\cdot6 = 38. \end{cases}$

5. Предприятие производит продукцию трех видов, используя для этого два вида сырья. Нормы затрат сырья (в у.е.) на производство одной единицы изделия каждого вида указаны в таблице.

Виды сырья	Виды продукции		
	A_1	A_2	A_3
S_1	2	3	5
S_2	4	2	1

Установите соответствие между объемами произведенной продукции $Y=(y_1;y_2;y_3)$ и полными затратами ресурсов $X=(x_1;x_2)$.

1. $Y=(3;4;5)$
2. $Y=(3;5;6)$
3. $Y=(3;6;7)$

$X=(43;25)$ - 1

$X=(51;28)$ - 2

$X=(59;31)$ - 3

$X=(25;43)$

$X=(28;51)$

Решение:

Так как полные затраты ресурсов определяются из системы уравнений вида

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 + 3y_2 + 5y_3, \\ x_2 = 4y_1 + 2y_2 + y_3, \end{cases}$$ то:

1. $\begin{cases} x_1 = 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + 5\cdot 5 = 43, \\ x_2 = 4\cdot 3 + 2\cdot 4 + 1\cdot 5 = 25. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 = 2\cdot 3 + 3\cdot 5 + 5\cdot 6 = 51, \\ x_2 = 4\cdot 3 + 2\cdot 5 + 1\cdot 6 = 28. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 = 2\cdot 3 + 3\cdot 6 + 5\cdot 7 = 59, \\ x_2 = 4\cdot 3 + 2\cdot 6 + 1\cdot 7 = 31. \end{cases}$

Кейс 3 подзадача 3

1. Предприятие производит продукцию трех видов, используя для этого два вида сырья. Нормы затрат сырья (в у.е.) на производство одной единицы изделия каждого вида указаны в таблице.

Виды сырья	Виды продукции		
	A_1	A_2	A_3
S_1	4	3	5
S_2	3	2	1

Пусть стоимость одной единицы ресурса S_1 равна 3 у.е., а ресурса S_2 равна 1 у.е. Если объемы производства представлены как $Y = (6;4;3)$, то суммарная стоимость затрат ресурсов будет равна ______ у.е.

182

Решение:

Определим полные затраты ресурсов как

$$\begin{cases} x_1 = 4\cdot 6 + 3\cdot 4 + 5\cdot 3 = 51, \\ x_2 = 3\cdot 6 + 2\cdot 4 + 1\cdot 3 = 29. \end{cases}$$

Тогда суммарную стоимость затрат ресурсов C можно вычислить как произведение $C = X\cdot P,$ где $X = (x_1; x_2)$ – матрица объемов используемых ресурсов, $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ – матрица стоимости каждого вида ресурса соответственно.

Поэтому $C = (51;29)\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 182$ у.е.

2. Предприятие производит продукцию трех видов, используя для этого два вида сырья. Нормы затрат сырья (в у.е.) на производство одной единицы изделия каждого вида указаны в таблице.

Виды сырья	Виды продукции		
	A_1	A_2	A_3
S_1	3	2	4
S_2	1	5	2

Пусть стоимость одной единицы ресурса S_1 равна 3 у.е., а ресурса S_2 равна 2 у.е. Если объемы производства представлены как $Y = (5; 3; 3)$, то суммарная стоимость затрат ресурсов будет равна _______ у.е.

151

Решение:

Определим полные затраты ресурсов как

$$\begin{cases} x_1 = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 3 = 33, \\ x_2 = 1 \cdot 5 + 5 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 26. \end{cases}$$

Тогда суммарную стоимость затрат ресурсов C можно вычислить как произведение $C = X \cdot P,$ где $X = (x_1; x_2)$ – матрица объемов используемых ресурсов, $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ – матрица стоимости каждого вида ресурса соответственно.

Поэтому $C = (33; 26) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 151$ у.е.

3. Предприятие производит продукцию трех видов, используя для этого два вида сырья. Нормы затрат сырья (в у.е.) на производство одной единицы изделия каждого вида указаны в таблице.

Виды сырья	**Виды продукции**		
	A_1	A_2	A_3
S_1	**3**	**4**	**2**
S_2	**4**	**1**	**3**

Пусть стоимость одной единицы ресурса S_1 равна 1 у.е., а ресурса S_2 равна 2 у.е. Если объемы производства представлены как $Y = (6; 5; 4)$, то суммарная стоимость затрат ресурсов будет равна _______ у.е.

128

Решение:

Определим полные затраты ресурсов как

$$\begin{cases} x_1 = 3 \cdot 6 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 4 = 46, \\ x_2 = 4 \cdot 6 + 1 \cdot 5 + 3 \cdot 4 = 41. \end{cases}$$

Тогда суммарную стоимость затрат ресурсов C можно вычислить как произведение $C = X \cdot P$, где $X = (x_1; x_2)$ – матрица объемов используемых ресурсов, $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ – матрица стоимости каждого вида ресурса соответственно.

Поэтому $C = (46; 41) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 128$ у.е.

4. Предприятие производит продукцию трех видов, используя для этого два вида сырья. Нормы затрат сырья (в у.е.) на производство одной единицы изделия каждого вида

указаны в таблице.

Виды сырья	**Виды продукции**		
	A_1	A_2	A_3
S_1	**5**	**3**	**1**
S_2	**2**	**2**	**3**

Пусть стоимость одной единицы ресурса S_1 равна 1 у.е., а ресурса S_2 равна 3 у.е. Если объемы производства представлены как $Y = (5;\,3;\,4)$, то суммарная стоимость затрат ресурсов будет равна ______ у.е.

122

Решение:

Определим полные затраты ресурсов как

$$\begin{cases} x_1 = 5\cdot 5 + 3\cdot 3 + 1\cdot 4 = 38, \\ x_2 = 2\cdot 5 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 = 28. \end{cases}$$

Тогда суммарную стоимость затрат ресурсов C можно вычислить как произведение $C = X \cdot P$, где $X = (x_1; x_2)$ – матрица объемов используемых ресурсов, $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ – матрица стоимости каждого вида ресурса соответственно.

Поэтому $C = (38; 28)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 122$ у.е.

5. Предприятие производит продукцию трех видов, используя для этого два вида сырья. Нормы затрат сырья (в у.е.) на производство одной единицы изделия каждого вида указаны в таблице.

Виды сырья	**Виды продукции**		
	A_1	A_2	A_3
S_1	**2**	**3**	**5**
S_2	**4**	**2**	**1**

Пусть стоимость одной единицы ресурса S_1 равна 2 у.е., а ресурса S_2 равна 1 у.е. Если объемы производства представлены как $Y = (5;\,4;\,3)$, то суммарная стоимость затрат ресурсов будет равна ______ у.е.

105

Решение:

Определим полные затраты ресурсов как

$$\begin{cases} x_1 = 2\cdot 5 + 3\cdot 4 + 5\cdot 3 = 37, \\ x_2 = 4\cdot 5 + 2\cdot 4 + 1\cdot 3 = 31. \end{cases}$$

Тогда суммарную стоимость затрат ресурсов C можно вычислить как произведение $C = X\cdot P$, где $X = (x_1; x_2)$ – матрица объемов используемых ресурсов, $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ – матрица стоимости каждого вида ресурса соответственно.

Поэтому $C = (37; 31)\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 105$ у.е.

Варианты контрольных работ

Вариант 1

Задача 1. Найти матрицу $C = A\cdot A'$, где $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Выяснить, имеет ли матрица C обратную. Найти ранг матрицы C.

Задача 2. По формулам Крамера решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Вариант 2

Задача 1. Вычислить определитель матрицы $C = A^2 + 3A - E$ разложением по второй строке, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, E – единичная матрица. Являются ли столбцы матрицы C линейно независимыми?

Задача 2. Методом обратной матрицы решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 7, \\ x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Вариант 3

Задача 1. Решить матричное уравнение $AXB = C$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 4 & 17 \end{pmatrix}$.

Задача 2. Методом Гаусса решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -5, \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 = 5, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -6. \end{cases}$$

Вариант 4

Задача 1. Решить матричное уравнение $X(B'B - 3E) + 18B = 0$, где $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, E – единичная матрица третьего порядка.

Задача 2. Решить матричное уравнение $AXB = C$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 4 & 17 \end{pmatrix}$.

Вариант 5

Задача 1. Вычислить ранг матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 10 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Являются ли строки матрицы A линейно независимыми?

Задача 2. Решить матричное уравнение $X(B'B - 3E) + 18B = 0$, где $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; Е - единичная матрица третьего порядка.

Вопросы к экзамену

1. Понятие матрицы. Виды матриц. Транспонирование матрицы. Равенство матриц. Алгебраические операции над матрицами: умножение на число, сложение, умножение матриц.
2. Определители 2-го и 3-го порядков (определение и их свойства). Теорема Лапласа о разложении определителя по элементам строки или столбца.
3. Квадратная матрица и ее определитель. Особенная и неособенная квадратные матрицы. Присоединенная матрица. Матрица, обратная данной, и алгоритм ее вычисления.
4. Понятие минора k-го порядка. Ранг матрицы (определение). Вычисление ранга матрицы с помощью элементарных преобразований. Пример.
5. Линейная независимость столбцов (строк) матрицы. Теорема о ранге матрицы.

6. Система *n* линейных уравнений с *n* переменными (общий вид) и матричная форма её записи. Решение системы (определение). Совместные и несовместные, определенные и неопределенные системы линейных уравнений.

7. Решение системы *n* линейных уравнений с *n* переменными по формулам Крамера.

8. Решение системы *n* линейных уравнений с *n* переменными с помощью обратной матрицы (вывод формулы $X=A^{-1}B$).

9. Метод Гаусса решения системы *n* линейных уравнений с *n* переменными. Понятие о методе Жордана-Гаусса.

10. Система m линейных уравнений с n переменными. Теорема Кронекера-Капелли. Условия определенности и неопределенности совместной системы линейных уравнений.

11. Базисные (основные) и свободные (неосновные) переменные системы m линейных уравнений с n переменными. Базисное решение.

12. Система линейных однородных уравнений и ее решения. Условие существования ненулевых решений системы.

13. Векторы на плоскости и в пространстве (геометрические векторы). Линейные операции над векторами (сложение, умножение вектора на число). Коллинеарные и компланарные векторы.

14. Скалярное произведение двух векторов (определение) и его выражение в координатной форме. Угол между векторами.

15. n-мерный вектор. Линейная комбинация, линейная зависимость и независимость векторов.

16. Векторное (линейное) пространство, его размерность и базис. Теорема о существовании и единственности разложения вектора линейного пространства по векторам базиса.

17. Скалярное произведение векторов в n-мерном пространстве. Евклидово пространство. Длина (норма) вектора.

18. Ортогональные векторы. Ортогональный и ортонормированный базисы. Теорема о существовании ортонормированного базиса в евклидовом пространстве.

19. Определение оператора. Понятие линейного оператора. Образ и прообраз векторов.

20. Матрица линейного оператора в заданном базисе: связь между вектором x и образом y. Ранг оператора. Операции над линейными операторами. Нулевой и тождественный операторы.

21. Собственные векторы и собственные начения оператора $\tilde{A}$ (матрицы A). Характеристический многочлен оператора и его характеристическое уравнение.

22. Матрица линейного оператора в базисе, состоящем из его собственных векторов. Пример.

23. Квадратичная форма (определение). Матрица квадратичной формы. Ранг квадратичной формы. Пример.

24. Квадратичная форма (канонический вид). Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Пример. Закон инерции квадратичных форм.

25. Положительно и отрицательно определенная, знакоопределенная квадратичные формы. Критерии знакоопределенности квадратичной формы (через собственные значения ее матрицы и по критерию Сильвестра).

26. Уравнение линии на плоскости. Точка пересечения двух линий. Основные виды уравнений прямой на плоскости (одно из них вывести).

27. Общее уравнение прямой на плоскости, его исследование. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.

28. Кривые второго порядка, их общее уравнение. Нормальное уравнение окружности. Каноническое уравнение эллипса. Геометрический смысл параметров окружности и эллипса.

29. Канонические уравнения гиперболы и параболы, геометрический смысл их параметров. Уравнение асимптот гиперболы. График обратно пропорциональной зависимости и квадратного трехчлена.

30. Общее уравнение плоскости в пространстве и его частные случаи. Нормальный вектор плоскости. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.

31. Уравнения прямой линии в пространстве как линии пересечения двух плоскостей. Канонические уравнения прямой. Направляющий вектор прямой. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых в пространстве.

32. Углы между двумя плоскостями, между двумя прямыми, между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей, двух прямых, прямой и плоскости

4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Требования к выполнению тестовых заданий:

При выполнении тестовых заданий с выбором одного (нескольких) ответа (-ов) в закрытой форме необходимо выбрать один (несколько) правильный (-ых) ответ (-ов) из предложенных вариантов.

При выполнении тестовых заданий в открытой форме необходимо указать единственно правильный ответ.

При выполнении тестовых заданий на установление правильной последовательности в закрытой форме необходимо установить правильную последовательность в полном объеме предложенных вариантов.

Требования к докладу:

Структура выступления: 1) вступительное слово; 2) основные положения, выносимые на рассмотрение; 3) изложение материала, разбитое на вопросы и подвопросы (пункты, подпункты) с необходимыми ссылками на источники, использованные автором; 5) выводы; 6) список использованных источников.

Требования к экзамену

Текущий контроль успеваемости предназначен для проверки хода и качества усвоения учебного материала, стимулирования учебной работы обучающихся и совершенствования методики проведения занятий. Он может проводиться в ходе проведения всех видов занятий в форме, избранной преподавателем или предусмотренной рабочей учебной программой дисциплины.

Результаты текущего контроля успеваемости не заносятся в зачетную книжку студента и используются преподавателем при оценке знаний в ходе проведения промежуточной аттестации.

В соответствии с Положением о проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся в Автономной некоммерческой организации высшего образования «Институт экономики и управления» результаты текущего контроля успеваемости студента оцениваются преподавателем в размере до 40 баллов.

Оценка текущего контроля успеваемости

№ п/п	Вид контроля	Количество баллов
1.	Активная работа на практических занятиях (ответы по вопросам семинара, выполнение практических заданий)	до 20

№ п/п	Вид контроля	Количество баллов
2.	Выполнение контрольной работы	до 20
	Всего	до 40

Промежуточная аттестация имеет целью определить степень достижения учебных целей по дисциплине и проводится в форме экзамена.

В соответствии с Положением о проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся в Автономной некоммерческой организации высшего образования «Институт экономики и управления» результаты промежуточной аттестации оцениваются преподавателем в размере до 30 баллов.

Итоговый результат промежуточной аттестации оценивается преподавателем в размере до 100 баллов, в том числе:

70 баллов – как результат текущей аттестации;

30 баллов – как результат промежуточной аттестации.

Знания, умения и навыки студентов определяются следующими оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» или «неудовлетворительно».

Соответствие баллов традиционной системе оценки при проведении промежуточной аттестации представлено в таблице.

Итоговая оценка промежуточной аттестации

№ п/п	Оценки	Количество баллов
Экзамен		
1.	Отлично	81 – 100
2.	Хорошо	61 – 80
3.	Удовлетворительно	41 – 60
4.	Неудовлетворительно	менее 41

Критерии оценивания компетенций формируются на основе балльно-рейтинговой системы с помощью всего комплекса методических материалов, определяющих процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих данный этап формирования компетенций.

Оценка «отлично» предполагает наличие глубоких исчерпывающих знаний по всему курсу. Студент должен не только понимать сущность исследуемых понятий, но выстраивать взаимосвязи рассматриваемых процессов и явлений. В процессе семинарских занятий и экзамена, должны быть даны логически связанные, содержательные, полные, правильные и конкретные ответы на все поставленные вопросы. При этом студент должен активно использовать в ответах на вопросы материалы рекомендованной литературы.

Оценка «хорошо» свидетельствует о твердых и достаточно полных знаниях всего материала курса, понимание сути и взаимосвязей между рассматриваемых процессов и явлений. Последовательные, правильные, конкретные ответы на основные вопросы. Использование в ответах отдельных материалов рекомендованной литературы.

Оценка «удовлетворительно» - знание и понимание основных вопросов программы. Правильные и конкретные, без грубых ошибок ответы на основную часть вопросов экзамена. Наличие отдельных ошибок в обосновании ответов. Некоторое использование в ответах на вопросы материалов рекомендованной литературы.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, который не знает значительной части программного материала, допускает существенные ошибки, неуверенно, с большими затруднениями выполняет практические работы. Как правило, оценка «неудовлетворительно» ставится студентам, которые не могут продолжить обучение без дополнительных занятий по соответствующей дисциплине.