

Автономная некоммерческая организация
высшего образования
«ИНСТИТУТ ЭКОНОМИКИ И УПРАВЛЕНИЯ»
(АНО ВО «ИЭУ»)

Кафедра «Гуманитарные, социально-экономические и естественно-
математические дисциплины»

УТВЕРЖДЕНА
Решением Ученого совета
Протокол № 17/01
от «17» января 2025 г.
Ректор АНО ВО «ИЭУ»

_____ В.Д. Бушуев
«17» января 2025 г.

Рабочая программа дисциплины

МАТЕМАТИКА. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Трудоемкость
4 зачетные единицы (144 часа)

Направление подготовки
38.03.01 Экономика

Профиль
Экономика предприятий и организаций

Квалификация (степень) выпускника
Бакалавр

Форма обучения
Очно-заочная, заочная

Тула 2025

Рабочая программа дисциплины «Математика. Линейная алгебра» составлена в соответствии с требованиями федерального государственного образовательного стандарта высшего образования (далее именуется – ФГОС ВО) по направлению подготовки 38.03.01 Экономика.

Дисциплина Б1.О.09.02 «Математика. Линейная алгебра» относится к обязательным дисциплинам и является обязательной для изучения.

Рабочая программа рассмотрена на заседании кафедры
«Экономика»
«17» января 2025 г., протокол № 17/01

1. Цели освоения дисциплины

Цели освоения дисциплины: освоение студентами математического аппарата, позволяющего повысить эффективность организационно-управленческой, информационно-аналитической и предпринимательской деятельности, анализировать, моделировать и решать прикладные управленческие задачи.

Линейная алгебра представляет собой математический аппарат, широко используемый во всех разделах математики и ее приложениях.

В процессе изучения дисциплины ставятся следующие задачи:

освоение методов линейной алгебры для решения прикладных задач;

выработка умения моделировать реальные (экономические) объекты и процессы с использованием математического аппарата линейной алгебры;

развитие логического и алгоритмического мышления студентов, повышение уровня их математической культуры;

развитие навыков самостоятельной работы с учебной и научной литературой.

2. Место дисциплины в структуре основной профессиональной образовательной программы

Дисциплина «Математика. Линейная алгебра» (Б1.О.09.02) относится к обязательным дисциплинам. Преподавание дисциплины «Математика. Линейная алгебра» строится исходя из необходимого уровня базовой подготовки студентов, обучающихся по направлениям 38.03.01 Экономика.

Для изучения дисциплины достаточно знаний математических дисциплин в объеме средней общеобразовательной школы.

Знания по дисциплине «Математика. Линейная алгебра» необходимы для изучения таких дисциплин как «Методы оптимальных решений», «Эконометрика», «Финансовая математика», «Статистика», «Анализ и диагностика финансово-хозяйственной деятельности предприятия (организации)», «Методы моделирования и прогнозирования в экономике».

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В соответствии с требованиями основной образовательной программы подготовки бакалавра в результате изучения дисциплины «Математика. Линейная алгебра» у студентов должны сформироваться следующие **универсальные компетенции (ОК)**:

УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач;

общепрофессиональные компетенции (ОПК):

Способен осуществлять сбор, обработку и статистический анализ данных, необходимых для решения поставленных экономических задач (ОПК-2)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны:

знать

- основные понятия матричного анализа, векторной алгебры и аналитической геометрии, используемые в экономических исследованиях и при изучении других дисциплин;

- методы решения систем линейных уравнений, определения собственных значений и собственных векторов линейных операторов в математически формализованных задачах;

уметь

- выполнять основные действия с матрицами, находить определители, записывать в матричном виде полученные данные, интерпретировать полученные в ходе решения результаты;

владеть навыками

- записи текстовых задач в матричной форме, через линейные операторы, критериями выбора пакетов прикладных программ для решения конкретных задач.

4. Структура и содержание дисциплины

Содержанием дисциплины «Математика. Линейная алгебра» предусмотрены контактная работа с преподавателем и самостоятельная работа обучающихся.

Объем и виды учебной работы представлены в тематическом плане.

Вид учебной работы	Очно-заочно	Заочно
Общая трудоемкость	144	144
В том числе:		
Контактная работа (всего)	20	16
В том числе:		
Лекции	8	6
Практические занятия	12	8
Контроль самостоятельной работы		
Самостоятельная работа	97	121
Вид промежуточной аттестации - экзамен	27	9

4.1. Тематический план изучения дисциплины

№ п/п	Название разделов и тем, форма контроля	Очно-заочная форма обучения				Заочная форма обучения				Коды формируемых компетенций
		Всего (часов)	контактн. работа		Самостоятельная работа студентов	Всего (часов)	контактн. работа		Самостоятельная работа студентов	
			лекции	практические занятия			лекции	практические занятия		
1.	Тема 1. Матрицы и определители	20	2	2	16	23	1	2	20	
2.	Тема 2. Системы линейных уравнений	21	2	2	17	24	1	2	21	
3.	Тема 3. Векторные пространства	19	1	2	16	22	1	1	20	
4.	Тема 4. Линейные операторы	19	1	2	16	22	1	1	20	
5.	Тема 5. Квадратичные формы	19	1	2	16	22	1	1	20	

6.	Тема 6. Элементы аналитической геометрии	19	1	2	16	22	1	1	20	
7	Экзамен	27				9				
	Итого по дисциплине	144	8	12	97	144	6	8	121	УК-1, ОПК-2

4.2. Содержание дисциплины

Изучение дисциплины «Математика. Линейная алгебра» включает следующие виды взаимосвязанной работы:

Контактная работа (лекционные, практические занятия, контроль самостоятельной работы);

самостоятельная работа студентов по изучению курса с использованием учебников, учебных пособий, иных электронных образовательных ресурсов, консультаций с ведущими дисциплину преподавателями;

Тема 1. Матрицы и определители

Понятие матрицы. Виды матриц. Равенство матриц. Действия с матрицами. Транспонирование матриц. Квадратные матрицы.

Определители квадратных матриц второго, третьего и n -го порядков. Алгебраическое дополнение. Свойства определителей. Теорема Лапласа. Обратная матрица и алгоритм ее вычисления. Понятия минора n -го порядка матрицы. Ранг матрицы. Вычисление ранга матрицы с помощью элементарных преобразований. Линейная комбинация, линейная зависимость и независимость строк (столбцов) матрицы. Теорема о ранге матрицы.

Тема 2. Системы линейных уравнений

Система m линейных уравнений с n переменными (общий вид).

Матрица системы. Матричная форма записи системы линейных уравнений. Совместные и несовместные системы. Теорема Крамера о разрешимости системы n линейных уравнений с n переменными.

Решение такой системы: а) по формулам Крамера; б) методом обратной матрицы; в) методом Гаусса. Понятие о методе Жордана–Гаусса. Теорема Кронекера–Капелли. Условие определенности и неопределенности любой совместной системы линейных уравнений. Базисные (основные) и свободные (неосновные) переменные.

Базисное решение. Система линейных однородных уравнений и ее решения. Понятие о модели Леонтьева.

Тема 3. Векторные пространства

Векторы на плоскости и в пространстве (геометрические векторы). Линейные операции над векторами. Коллинеарные и компланарные векторы. Координаты и длина вектора. Скалярное произведение двух векторов (определение) и его выражение в координатной форме. Угол между векторами. n -мерный вектор. Линейная комбинация, линейная зависимость и независимость векторов. Векторное (линейное) пространство, его размерность и базис. Разложение вектора по базису. Переход к новому базису. Скалярное произведение векторов в n -мерном пространстве. Евклидово пространство.

Длина (норма) вектора. Ортогональные векторы. Ортогональный и ортонормированный базисы.

Тема 4. Линейные операторы

Понятие линейного оператора. Образ и прообраз векторов.

Матрица линейного оператора в заданном базисе. Ранг оператора.

Операции над линейными операторами. Нулевой и тождественный операторы. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора (матрицы). Характеристический многочлен матрицы.

Диагональный вид матрицы линейного оператора в базисе, состоящем из его собственных векторов.

Тема 5. Квадратичные формы

Квадратичные формы (определение). Матрица квадратичной формы. Матричная форма записи квадратичной формы. невырожденное линейное преобразование квадратичной формы. Канонический вид и ранг квадратичной формы. Закон инерции квадратичных форм. Положительно и отрицательно определенная, знакоопределенная квадратичные формы. Критерий определенности квадратичной формы через собственные значения ее матрицы. Критерий Сильвестра.

Тема 6. Элементы аналитической геометрии

Уравнение линии на плоскости. Уравнение прямой с угловым коэффициентом и начальной ординатой. Общее уравнение прямой и его исследование. Построение прямой по ее уравнению. Уравнение прямой, проходящей: а) через данную точку в данном направлении; б) через две данные точки. Координаты точки пересечения двух прямых. Условие параллельности и перпендикулярности прямых. Кривые второго порядка, их общее уравнение. Нормальное уравнение окружности. Канонические уравнения эллипса, гиперболы, параболы. Уравнение плоскости в пространстве и его частные случаи. Условие параллельности и перпендикулярности плоскостей. Уравнение прямой как пересечение двух плоскостей. Канонические уравнения прямой в пространстве. Углы между плоскостями, прямыми, прямой и плоскостью.

5. Образовательные технологии

Преподаватели имеют право выбирать методы и средства обучения, наиболее полно отвечающие их индивидуальным особенностям и обеспечивающие высокое качество усвоения студентами учебного материала.

Цель лекционных занятий – формирование у студентов ориентировочной основы для последующего усвоения материала методом самостоятельной работы.

Содержание лекции должно отвечать следующим дидактическим требованиям:

изложение материала от простого к сложному, от известного к неизвестному;

логичность, четкость и ясность в изложении материала;

возможность проблемного изложения, дискуссии, диалога с целью активизации деятельности студентов;

опора смысловой части лекции на подлинные факты, события, явления, статистические данные;

тесная связь теоретических положений и выводов с практикой и будущей профессиональной деятельностью студентов.

Цель практических занятий – закрепить отдельные аспекты проблемы в дополнение к лекционному материалу, обучить студентов грамотно и аргументировано излагать свои мысли. Практические занятия предназначены для выработки практических умений и приобретения навыков в решении задач, производстве расчетов, разработке и оформлении документов.

На практических занятиях приветствуются домашние заготовки в виде статистических данных, рисунков, картосхем, материала по теме выступления.

Самостоятельная работа студентов имеет целью закрепление и углубление полученных знаний, поиск и приобретение новых знаний, в том числе с использованием компьютерных обучающих программ, а также выполнение заданий, тестов, подготовку к промежуточной аттестации.

Основной целью самостоятельной работы студентов является обучение навыкам работы с научно-теоретической литературой и практическими материалами, которые необходимы для углубленного изучения дисциплины.

Самостоятельная работа проводится для того, чтобы студент умел самостоятельно изучать, анализировать, перерабатывать и излагать изученный материал. В условиях заочного обучения студенту необходимо закрепить знания, умения и навыки, полученные в ходе аудиторных занятий (лекций, практики). Это актуализирует процесс образования и наполняет его осознанным стремлением к профессионализму.

Самостоятельная работа студента должна носить систематический характер, быть интересной и привлекательной. Необходимо предусмотреть развитие форм самостоятельной работы, выводя студентов к завершению изучения учебной дисциплины на её высший уровень.

Пакет заданий для самостоятельной работы следует выдавать в начале изучения дисциплины, определив предельные сроки их выполнения и сдачи. Организуя самостоятельную работу, необходимо постоянно обучать студентов методам такой работы.

Результаты самостоятельной работы контролируются преподавателями, при этом проводятся: тестирование, экспресс-опрос на практических занятиях, проверка выполнения практических заданий.

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.

Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

6.1. Самостоятельная работа студентов

Цель данного вида работы студента в условиях заочного вуза — закрепить знания, умения и навыки, полученные в ходе аудиторных занятий. Это актуализирует процесс образования и наполняет его осознанным стремлением к профессионализму.

Темы самостоятельной работы частично повторяют лекционную тематику, а сам характер ее предусматривает самостоятельную работу студента по всем темам дисциплины, включая изучение основной и дополнительной литературы, рекомендованной в данной программе, а также изучение статей экономической периодики, работу с электронными учебными ресурсами, подготовку к практическим занятиям, подготовку выполнения контрольной работы, подготовку к экзамену. Кроме того, предусматривается активное использование студентом индивидуальных консультаций с ведущим преподавателем, который помогает в этой работе и контролирует ее результаты.

* Примечание:

а) Для обучающихся по индивидуальному учебному плану - учебному плану, обеспечивающему освоение соответствующей образовательной программы на основе индивидуализации ее содержания с учетом особенностей и образовательных потребностей конкретного обучающегося, в том числе при ускоренном обучении:

При разработке образовательной программы высшего образования в части рабочей программы дисциплины согласно требованиям действующему законодательству объем

дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических или астрономических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся образовательная организация устанавливает в соответствии с утвержденным индивидуальным учебным планом при освоении образовательной программы обучающимся, который имеет среднее профессиональное или высшее образование, и (или) обучается по образовательной программе высшего образования, и (или) имеет способности и (или) уровень развития, позволяющие освоить образовательную программу в более короткий срок по сравнению со сроком получения высшего образования по образовательной программе, установленным Институтом в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования (ускоренное обучение такого обучающегося по индивидуальному учебному плану в порядке, установленном соответствующим локальным нормативным актом образовательной организации).

б) Для обучающихся с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов:

При разработке адаптированной образовательной программы высшего образования, а для инвалидов - индивидуальной программы реабилитации инвалида в соответствии с действующим законодательством, образовательная организация устанавливает конкретное содержание рабочих программ дисциплин и условия организации и проведения конкретных видов учебных занятий, составляющих контактную работу обучающихся с преподавателем и самостоятельную работу обучающихся с ограниченными возможностями здоровья (инвалидов) (при наличии факта зачисления таких обучающихся с учетом конкретных нозологий).

в) Для лиц, зачисленных для продолжения обучения в соответствии с действующим законодательством в отношении Республики Крым и города федерального значения Севастополя, объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических или астрономических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся образовательная организация устанавливает в соответствии с утвержденным индивидуальным учебным планом при освоении образовательной программы обучающимися, зачисленными для продолжения обучения в соответствии с действующим законодательством, в течение установленного срока освоения основной профессиональной образовательной программы высшего образования с учетом курса, на который они зачислены (указанный срок может быть увеличен не более чем на один год по решению Института, принятому на основании заявления обучающегося).

г) Для лиц, осваивающих образовательную программу в форме самообразования (если образовательным стандартом допускается получение высшего образования по соответствующей образовательной программе в форме самообразования), а также лиц, обучавшихся по не имеющей государственной аккредитации образовательной программе:

При разработке образовательной программы высшего образования, в соответствии с действующим законодательством, объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических или астрономических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся образовательная организация устанавливает в соответствии с утвержденным индивидуальным учебным планом при освоении образовательной программы обучающегося, зачисленного в качестве экстерна для прохождения промежуточной и (или) государственной итоговой аттестации в Институте по соответствующей имеющей государственную аккредитацию образовательной программе в

порядке, установленном соответствующим локальным нормативным актом образовательной организации.

6.2. Контроль самостоятельной работы

Контроль самостоятельной работы проводится в форме тестирования по всем темам дисциплины.

6.3. Система оценки знаний студентов

6.3.1. Текущий контроль

Текущий контроль успеваемости предназначен для проверки хода и качества Текущий контроль успеваемости предназначен для проверки хода и качества усвоения учебного материала, стимулирования учебной работы обучающихся и совершенствования методики проведения занятий. Он может проводиться в ходе проведения всех видов занятий в форме, избранной преподавателем или предусмотренной рабочей учебной программой дисциплины.

Результаты текущего контроля успеваемости не заносятся в зачетную книжку студента и используются преподавателем при оценке знаний в ходе проведения промежуточной аттестации.

В соответствии с Положением о проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся в Автономной некоммерческой организации высшего образования «Институт экономики и управления» результаты текущего контроля успеваемости студента оцениваются преподавателем в размере до 40 баллов.

Оценка текущего контроля успеваемости

№ п/п	Вид контроля	Количество баллов
1.	Активная работа на практических занятиях (ответы по вопросам семинара, выполнение практических заданий)	до 20
2.	Выполнение контрольной работы	до 20
	Всего	до 40

6.3.2. Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация имеет целью определить степень достижения учебных целей по дисциплине и проводится в форме экзамена.

В соответствии с Положением о проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся в Автономной некоммерческой организации высшего образования «Институт экономики и управления» результаты промежуточной аттестации оцениваются преподавателем в размере до 30 баллов.

Итоговый результат промежуточной аттестации оценивается преподавателем в размере до 100 баллов, в том числе:

70 баллов – как результат текущей аттестации;

30 баллов – как результат промежуточной аттестации.

Знания, умения и навыки студентов определяются следующими оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» или «неудовлетворительно».

Соответствие баллов традиционной системе оценки при проведении промежуточной аттестации представлено в таблице.

Итоговая оценка промежуточной аттестации

№ п/п	Оценки	Количество баллов
Экзамен		
1.	Отлично	81 – 100
2.	Хорошо	61 – 80
3.	Удовлетворительно	41 – 60
4.	Неудовлетворительно	менее 41

Критерии оценивания компетенций формируются на основе балльно-рейтинговой системы с помощью всего комплекса методических материалов, определяющих процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих данный этап формирования компетенций (пункт 6.3.3).

Оценка «отлично» предполагает наличие глубоких исчерпывающих знаний по всему курсу. Студент должен не только понимать сущность исследуемых понятий, но выстраивать взаимосвязи рассматриваемых процессов и явлений. В процессе семинарских занятий и экзамена, должны быть даны логически связанные, содержательные, полные, правильные и конкретные ответы на все поставленные вопросы. При этом студент должен активно использовать в ответах на вопросы материалы рекомендованной литературы.

Оценка «хорошо» свидетельствует о твердых и достаточно полных знаниях всего материала курса, понимание сути и взаимосвязей между рассматриваемых процессов и явлений. Последовательные, правильные, конкретные ответы на основные вопросы. Использование в ответах отдельных материалов рекомендованной литературы.

Оценка «удовлетворительно» - знание и понимание основных вопросов программы. Правильные и конкретные, без грубых ошибок ответы на основную часть вопросов экзамена. Наличие отдельных ошибок в обосновании ответов. Некоторое использование в ответах на вопросы материалов рекомендованной литературы.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, который не знает значительной части программного материала, допускает существенные ошибки, неуверенно, с большими затруднениями выполняет практические работы. Как правило, оценка «неудовлетворительно» ставится студентам, которые не могут продолжить обучение без дополнительных занятий по соответствующей дисциплине.

6.3.3. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

В соответствии с требованиями действующего Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 38.03.01 Экономика (уровень бакалавриата), для аттестации обучающихся на соответствие их персональных достижений поэтапным требованиям соответствующей программы (текущая и промежуточная аттестация) созданы фонды оценочных средств, включающие типовые задания, контрольные работы, тесты и методы контроля, позволяющие оценить знания, умения и уровень приобретенных компетенций. Фонды оценочных средств утверждены первым проректором.

Фонд оценочных средств (далее – ФОС) по учебной дисциплине сформирован на ключевых принципах оценивания:

- валидности (объекты оценки должны соответствовать поставленным целям обучения);
- надежности (использование единообразных стандартов и критериев для оценивания достижений);

- справедливости (разные обучающиеся должны иметь равные возможности добиться успеха);
- своевременности (поддержание развивающей обратной связи);
- эффективности (соответствие результатов деятельности поставленным задачам).

Перечень вопросов к экзамену

1. Понятие матрицы. Виды матриц. Транспонирование матрицы. Равенство матриц. Алгебраические операции над матрицами: умножение на число, сложение, умножение матриц.

2. Определители 2-го и 3-го порядков (определение и их свойства). Теорема Лапласа о разложении определителя по элементам строки или столбца.

3. Квадратная матрица и ее определитель. Особенная и неособенная квадратные матрицы. Присоединенная матрица. Матрица, обратная данной, и алгоритм ее вычисления.

4. Понятие минора k -го порядка. Ранг матрицы (определение). Вычисление ранга матрицы с помощью элементарных преобразований. Пример.

5. Линейная независимость столбцов (строк) матрицы. Теорема о ранге матрицы.

6. Система n линейных уравнений с n переменными (общий вид) и матричная форма её записи. Решение системы (определение). Совместные и несовместные, определенные и неопределенные системы линейных уравнений.

7. Решение системы n линейных уравнений с n переменными по формулам Крамера.

8. Решение системы n линейных уравнений с n переменными с помощью обратной матрицы (вывод формулы $X=A^{-1}B$).

9. Метод Гаусса решения системы n линейных уравнений с n переменными. Понятие о методе Жордана-Гаусса.

10. Система m линейных уравнений с n переменными. Теорема Кронекера-Капелли. Условия определенности и неопределенности совместной системы линейных уравнений.

11. Базисные (основные) и свободные (неосновные) переменные системы m линейных уравнений с n переменными. Базисное решение.

12. Система линейных однородных уравнений и ее решения. Условие существования ненулевых решений системы.

13. Векторы на плоскости и в пространстве (геометрические векторы). Линейные операции над векторами (сложение, умножение вектора на число). Коллинеарные и компланарные векторы.

14. Скалярное произведение двух векторов (определение) и его выражение в координатной форме. Угол между векторами.

15. n -мерный вектор. Линейная комбинация, линейная зависимость и независимость векторов.

16. Векторное (линейное) пространство, его размерность и базис. Теорема о существовании и единственности разложения вектора линейного пространства по векторам базиса.

17. Скалярное произведение векторов в n -мерном пространстве. Евклидово пространство. Длина (норма) вектора.

18. Ортогональные векторы. Ортогональный и ортонормированный базисы. Теорема о существовании ортонормированного базиса в евклидовом пространстве.

19. Определение оператора. Понятие линейного оператора. Образ и прообраз векторов.

20. Матрица линейного оператора в заданном базисе: связь между вектором x и образом y . Ранг оператора. Операции над линейными операторами. Нулевой и тождественный операторы.

21. Собственные векторы и собственные значения оператора \tilde{A} (матрицы A). Характеристический многочлен оператора и его характеристическое уравнение.

22. Матрица линейного оператора в базисе, состоящем из его собственных векторов. Пример.

23. Квадратичная форма (определение). Матрица квадратичной формы. Ранг квадратичной формы. Пример.

24. Квадратичная форма (канонический вид). Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Пример. Закон инерции квадратичных форм.

25. Положительно и отрицательно определенная, знакоопределенная квадратичные формы. Критерии знакоопределенности квадратичной формы (через собственные значения ее матрицы и по критерию Сильвестра).

26. Уравнение линии на плоскости. Точка пересечения двух линий. Основные виды уравнений прямой на плоскости (одно из них вывести).

27. Общее уравнение прямой на плоскости, его исследование. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.

28. Кривые второго порядка, их общее уравнение. Нормальное уравнение окружности. Каноническое уравнение эллипса. Геометрический смысл параметров окружности и эллипса.

29. Канонические уравнения гиперболы и параболы, геометрический смысл их параметров. Уравнение асимптот гиперболы. График обратной пропорциональной зависимости и квадратного трехчлена.

30. Общее уравнение плоскости в пространстве и его частные случаи. Нормальный вектор плоскости. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.

31. Уравнения прямой линии в пространстве как линии пересечения двух плоскостей. Канонические уравнения прямой. Направляющий вектор прямой. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых в пространстве.

32. Углы между двумя плоскостями, между двумя прямыми, между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей, двух прямых, прямой и плоскости.

Типовые тестовые задания

1. Определитель $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -5 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ равен ...

- 21
- 3
- 33
- 5

2. Корень уравнения $\begin{vmatrix} 3 & x+5 \\ 1 & 2-x^2 \end{vmatrix} = -3$ равен ...

- 1
- 2
- 1
- 2

3. Умножение матрицы A на матрицу B возможно, если эти матрицы имеют вид ...

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ - правильно}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда матрица $C = A \cdot B$ имеет вид ...

$$\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 8 & -3 \end{pmatrix} \text{ - правильно}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -9 & -15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 8 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

5. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Если $B = 2A^T - A$, то матрица B равна ...

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ - правильно}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

6. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Если $B^T - 2A = 3E$, где E – единичная матрица того же размера, что и матрица A , то матрица B равна ...

$\begin{pmatrix} 11 & -6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ - правильно

$\begin{pmatrix} 11 & 4 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

7. Ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ равен ...

2

1

3

4

8. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & x^2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ не существует обратной, если значение x равно ...

± 4 - правильно

± 8

$\pm \frac{1}{4}$

$\pm \frac{1}{8}$

Примеры заданий контрольной работы

Вариант 1

Задача 1. Найти матрицу $C = A \cdot A'$, где $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Выяснить, имеет ли матрица C обратную. Найти ранг матрицы C .

Задача 2. По формулам Крамера решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Вариант 2

Задача 1. Вычислить определитель матрицы $C = A^2 + 3A - E$ разложением по второй строке, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, E – единичная матрица. Являются ли столбцы матрицы C линейно независимыми?

Задача 2. Методом обратной матрицы решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 & = 7, \\ x_2 + 2x_3 & = -1, \\ x_1 - x_2 + x_3 & = 0. \end{cases}$$

Вариант 3

Задача 1. Решить матричное уравнение $AXB = C$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$,
 $C = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 4 & 17 \end{pmatrix}$.

Задача 2. Методом Гаусса решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 & = -5, \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 & = 5, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 & = -6. \end{cases}$$

Вариант 4

Задача 1. Решить матричное уравнение $X(B'B - 3E) + 18B = 0$, где $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, E – единичная матрица третьего порядка.

Задача 2. Решить матричное уравнение $AXB = C$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$,
 $C = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 4 & 17 \end{pmatrix}$.

Вариант 5

Задача 1. Вычислить ранг матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 10 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Являются ли строки матрицы A линейно независимыми?

Задача 2. Решить матричное уравнение $X(B'V - 3E) + 18V = 0$, где

$$V = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}; E - \text{единичная матрица третьего порядка.}$$

Примеры кейс-заданий

1. Инвестор вложил одну четверть своего капитала, равного 80 тыс. руб., в акции A , а оставшуюся часть – в акции B . Через один год сумма его капитала увеличилась на 15,0 тыс. руб. Если бы инвестор распределил свой капитал наоборот, то увеличение капитала составляло бы 13,0 тыс. руб.

Отношение доходности акций B к доходности акций A равно ...

$\frac{4}{3}$

- правильно

$\frac{3}{4}$

$\frac{15}{13}$

$\frac{13}{15}$

$\frac{13}{15}$

$\frac{15}{13}$

$\frac{13}{15}$

Решение:

Пусть x – процентный доход по акциям A за год; y – по акциям B . Тогда процентный доход по акциям A за год равен 15 %, по акциям B – 20 %. Следовательно, отношение

доходности акций B к доходности акций A равно $\frac{20\%}{15\%} = \frac{4}{3}$.

2. Инвестор вложил одну четверть своего капитала, равного 40 тыс. руб., в акции A , а оставшуюся часть – в акции B . Через один год сумма его капитала увеличилась на 5,5 тыс. руб. Если бы инвестор распределил свой капитал наоборот, то увеличение капитала составляло бы 4,5 тыс. руб.

Отношение доходности акций B к доходности акций A равно ...

$\frac{3}{2}$

- правильно

$\frac{2}{3}$

$\frac{3}{2}$

$$\frac{\frac{10}{3}}{\frac{3}{10}}$$

Решение:

Пусть x – процентный доход по акциям A за год; y – по акциям B . Тогда процентный доход по акциям A за год равен 10 %, по акциям B – 15 %. Следовательно, отношение доходности акций B к доходности акций A равно $\frac{15\%}{10\%} = \frac{3}{2}$.

3. Инвестор вложил одну четверть своего капитала, равного 60 тыс. руб., в акции A , а оставшуюся часть – в акции B . Через один год сумма его капитала увеличилась на 9,75 тыс. руб. Если бы инвестор распределил свой капитал наоборот, то увеличение капитала составляло бы 11,25 тыс. руб.

Пусть процентный доход по акциям B не изменяется. Установите соответствие между годовым процентным доходом по акциям A и размером капитала инвестора.

1. 10 %
2. 15 %
3. 25 %
1. 68250 руб
2. 69000 руб
3. 70500 руб
- 69750 руб
- 71250 руб

Решение:

Пусть x – процентный доход по акциям A за год; y – по акциям B . Тогда годовой процентный доход по акциям B равен 15%.

1. Если процентный доход по акциям A за год составляет 10%, то размер капитала инвестора равен $15(1 + 0,1) + 45(1 + 0,15) = 16,5 + 51,75 = 68,25$, то есть 68 250 руб.
2. Если процентный доход по акциям A за год составляет 15%, то размер капитала инвестора равен $15(1 + 0,15) + 45(1 + 0,15) = 17,25 + 51,75 = 69$, то есть 69 000 руб.
3. Если процентный доход по акциям A за год составляет 25%, то размер капитала инвестора равен $15(1 + 0,25) + 45(1 + 0,15) = 18,75 + 51,75 = 70,5$, то есть 70 500 руб.

4. Инвестор вложил одну треть своего капитала, равного 90 тыс. руб., в акции A , а оставшуюся часть – в акции B . Через один год сумма его капитала увеличилась на 10,5 тыс. руб. Если бы инвестор распределил свой капитал наоборот, то увеличение капитала составляло бы 12.0 тыс. руб.

Пусть процентный доход по акциям B не изменяется. Установите соответствие между годовым процентным доходом по акциям A и размером капитала инвестора.

1. 10 %

- 2. 20 %
- 3. 30 %
- 1. 99000 руб.
- 2. 102000 руб.
- 3. 105000 руб
- 100500 руб
- 103500 руб

Решение:

Пусть x – процентный доход по акциям A за год; y – по акциям B . Тогда годовой процентный доход по акциям B равен 10%.

1. Если процентный доход по акциям A за год составляет 10%, то размер капитала инвестора равен $30(1 + 0,1) + 60(1 + 0,10) = 33 + 66 = 99,0$, то есть 99 000 руб.

2. Если процентный доход по акциям A за год составляет 20%, то размер капитала инвестора равен $30(1 + 0,2) + 60(1 + 0,10) = 36 + 66 = 102,0$, то есть 102 000 руб.

3. Если процентный доход по акциям A за год составляет 30%, то размер капитала инвестора равен $30(1 + 0,3) + 60(1 + 0,10) = 39 + 66 = 105,0$, то есть 105 000 руб.

5. Предприятие производит продукцию трех видов, используя для этого два вида сырья. Нормы затрат сырья (в у.е.) на производство одной единицы изделия каждого вида указаны в таблице.

Виды сырья	Виды продукции		
	A_1	A_2	A_3
S_1	3	2	4
S_2	1	5	2

Если ввести обозначения: x_1 – объем используемого ресурса S_1 , x_2 – объем S_2 , y_1 , y_2 и y_3 – объемы произведенной продукции видов A_1 , A_2 и A_3 соответственно, то полные затраты ресурсов (сырья) можно определить из системы линейных уравнений вида ...

Решение:

Так как нормы затрат сырья на производство одной единицы продукции известны, то полные затраты ресурсов вычисляются как произведение норм расхода сырья на соответствующие объемы произведенной продукции, то есть:

$$\begin{cases} x_1 = 3y_1 + 2y_2 + 4y_3, \\ x_2 = y_1 + 5y_2 + 2y_3. \end{cases}$$

7. Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины

а) Основная литература:

1. Высшая математика. Том 1. Линейная алгебра. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия [Электронный ресурс] : учебник / А.П. Господариков [и др.]. — Электрон. текстовые данные. — СПб. : Санкт-Петербургский горный университет, 2015. — 105 с. —
- Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/71687.html>

б) Дополнительная литература:

1. Ивлева А.М. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Ивлева А.М., Прилуцкая П.И., Черных И.Д.— Электрон. текстовые данные.— Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2014.— 180 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/45380.html>
2. Краснощеков А.Л. Аналитическая геометрия и линейная алгебра [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие/ Краснощеков А.Л.— Электрон. текстовые данные.— Пермь: Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, 2017.— 41 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/86349.html>
3. Морозова Л.Е. Линейная алгебра. Часть 2 [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Морозова Л.Е., Полякова О.Р.— Электрон. текстовые данные.— СПб.: Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, ЭБС АСВ, 2014.— 108 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/30007.html>

8. Профессиональные базы данных, информационные справочные системы и программное обеспечение

Лицензионное программное обеспечение

- 1) Microsoft Windows xp Лицензия № 61327464 от 31.12.2014
- 2) Microsoft Windows 8.1 Лицензия № 61327464 от 31.12.2014
- 3) Microsoft Windows 10 Лицензия № 61327464 от 31.12.2014
- 4) 1с Бухгалтерия 7.7 версия для обучения лицензия № 20050301/03 от 01.03.2005
- 5) Apache OpenOffice 4.1.9 Лицензия LGPL и PDL
- 6) Libre Office 7.1.0 Лицензия Mozilla Public License Version 2.0
- 7) Платформа moodle для тестирования и портфолио - Лицензия GNU GPL, GNU GPL 3+
- 8) ОС Ubuntu Desktop 20.04 - Лицензия GNU GPL
- 9) CalmWin Antivirus - Лицензия GNU GPL
- 10) Moon Secure - Лицензия GNU GPL

Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

Обновлен состав профессиональных баз данных и информационных справочных систем:

- 1) информационно-правовая система Консультант Плюс Максимальная Договор № б\н от 09.01.2020
- 2) официальный интернет-портал правовой информации. URL: <http://pravo.gov.ru>;
- 3) портал Федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования. URL: <http://fgosvo.ru>;
- 4) портал «Информационно-коммуникационные технологии в образовании». URL: <http://www.ict.edu.ru>.
- 5) ЭБС IPRbooks Лицензионный договор от 26.08.2020 №7031/20

Бесплатно распространяемое программное обеспечение:

- 1) средство для просмотра графических изображений IrfanView,
URL: <http://www.irfanview.com>;
- 2) средство для просмотра PDF-файлов Adobe Acrobat Reader DC,
URL: <https://acrobat.adobe.com/ru/ru/acrobat.html>;
- 3) средство для воспроизведения мультимедиа-файлов KMPlayer,
URL: <http://www.kmplayer.com>.

9. Перечень ресурсов сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

1. Методическая служба издательства «Бином. Лаборатория знаний» – URL: <http://metodist.lbz.ru/iumk/mathematics/er.php>
2. Научная электронная библиотека – URL: <http://elibrary.ru/defaultx.asp>
3. Научная библиотека открытого доступа «Киберленинка». Раздел «Математика» – URL: <http://cyberleninka.ru/article/c/matematika>
4. Поисковая система «Академия Google» – URL: <https://scholar.google.ru/>
5. Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов – URL: <http://fcior.edu.ru/>
6. Электронный ресурс по математическим дисциплинам – URL: <http://pstu.ru/title1/sources/mat/>

10. Материально-техническое обеспечение дисциплины

10.1. Институт располагает учебными аудиториями для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования. Учебные аудитории укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

10.2. Для проведения занятий лекционного типа по дисциплине обучающимся предлагаются наборы демонстрационного оборудования и учебно-наглядных пособий, которые обеспечивают тематические иллюстрации.

10.3. Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду Института.

Электронная информационно-образовательная среда Института, в течение всего периода обучения каждого обучающегося обеспечивает:

- индивидуальным неограниченным доступом к учебным планам, рабочим программам дисциплин (модулей), практик, к изданиям электронных библиотечных систем и электронным образовательным ресурсам, указанным в рабочих программах;
- фиксацией хода образовательного процесса, результатов промежуточной аттестации и результатов освоения программы бакалавриата;
- проведением всех видов занятий, процедур оценки результатов обучения, реализация которых предусмотрена с применением электронного обучения;
- формированием электронного портфолио обучающегося;
- взаимодействием между участниками образовательного процесса, в том числе синхронное и (или) асинхронное взаимодействия посредством сети "Интернет".

Функционирование электронной информационно-образовательной среды обеспечивается соответствующими средствами информационно-коммуникационных технологий и квалификацией работников, ее использующих и поддерживающих.

Функционирование электронной информационно-образовательной среды соответствует законодательству Российской Федерации.

Особенности организации образовательного процесса по образовательным программам для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья (при наличии).

1) Обучение обучающихся с ограниченными возможностями здоровья осуществляется на основе образовательных программ, адаптированных при необходимости для обучения указанных обучающихся.

2) Обучение по образовательным программам инвалидов и обучающихся с ограниченными возможностями здоровья осуществляется организацией с учетом особенностей психофизического развития, индивидуальных возможностей и состояния здоровья таких обучающихся.

3) Образовательными организациями высшего образования должны быть созданы специальные условия для получения высшего образования по образовательным программам обучающимися с ограниченными возможностями здоровья.

Под специальными условиями для получения высшего образования по образовательным программам обучающимися с ограниченными возможностями здоровья понимаются условия обучения таких обучающихся, включающие в себя использование специальных образовательных программ и методов обучения и воспитания, специальных учебников, учебных пособий и дидактических материалов, специальных технических средств обучения коллективного и индивидуального пользования, предоставление услуг ассистента (помощника), оказывающего обучающимся необходимую техническую помощь, проведение групповых и индивидуальных коррекционных занятий, обеспечение доступа в здания организаций и другие условия, без которых невозможно или затруднено освоение образовательных программ обучающимися с ограниченными возможностями здоровья.

В целях доступности получения высшего образования по образовательным программам инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья организацией обеспечивается:

- 1) для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по зрению:
 - наличие альтернативной версии официального сайта организации в сети "Интернет" для слабовидящих;
 - размещение в доступных для обучающихся, являющихся слепыми или слабовидящими, местах и в адаптированной форме (с учетом их особых потребностей) справочной информации о расписании учебных занятий (информация должна быть выполнена крупным рельефно-контрастным шрифтом (на белом или желтом фоне) и продублирована шрифтом Брайля);
 - присутствие ассистента, оказывающего обучающемуся необходимую помощь;
 - обеспечение выпуска альтернативных форматов печатных материалов (крупный шрифт или аудиофайлы);
 - обеспечение доступа обучающегося, являющегося слепым и использующего собаку-поводыря, к зданию организации;
- 2) для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по слуху:
 - дублирование звуковой справочной информации о расписании учебных занятий визуальной (установка мониторов с возможностью трансляции субтитров (мониторы, их размеры и количество необходимо определять с учетом размеров помещения);
 - обеспечение надлежащими звуковыми средствами воспроизведения информации;
- 3) для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья, имеющих нарушения опорно-двигательного аппарата, материально-технические условия должны обеспечивать возможность беспрепятственного доступа обучающихся в учебные помещения, столовые, туалетные и другие помещения организации, а также пребывания в указанных помещениях (наличие пандусов, поручней, расширенных дверных проемов,

лифтов, локальное понижение стоек-барьеров; наличие специальных кресел и других приспособлений).

Образование обучающихся с ограниченными возможностями здоровья может быть организовано как совместно с другими обучающимися, так и в отдельных группах.